Il est clair que si $\mu(\{z_0\}) < 1$ ou si $\nu(\{z_0\}) < 1$ alors l'égalité ci-dessus n'est pas vérifiée. Finalement on a $\mu(\{z_0\}) = 1 = \nu(\{z_0\})$, ce qui implique (puisque ν et μ sont des mesures positives de variation totale 1) $\mu(\mathbb{T}\backslash\{z_0\}) = 0 = \nu(\mathbb{T}\backslash\{z_0\})$. Soit E un borélien quelconque de $\mathbb{T}$. Si $z_0 \notin E$, comme $\mu(E) \leq \mu(\mathbb{T} \setminus \{z_0\})$, on a donc $\mu(E) = 0$. Par contre si $z_0 \in E$, comme $1 \geq \mu(E) \geq \mu(\{z_0\}) = 1$, on a donc $\mu(E) = 1$. On a donc montré que $\mu = \delta_{z_0}$. De même on montre que $\nu = \delta_{z_0}$. On conclut alors que δ_{z_0} est bien un point extrémal de $\mathcal{C}$.

Supposons à présent que $\mu \neq \delta_{z_0}$ pour tout $z_0 \in \mathbb{T}$ et montrons que μ n'est pas un point extrémal de $\mathcal{C}$. Il est clair que si le support de μ (défini comme le complémentaire du plus grand ouvert V tel que $\mu(V) = 0$) est réduit à un point z_0 alors μ est de la forme $\mu \neq \delta_{z_0}$. On peut donc supposer que le support de μ contient au moins deux points distincts $z_1 = e^{i\theta_1}$ et $z_2 = e^{i\theta_2}$ avec $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$. Soit $A = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\}$ et $B = \{e^{i\theta} : \frac{\theta_1+\theta_2}{2} < \theta < 2\pi\}$. Les boréliens A et B forment une partition de $\mathbb{T}$. Si $\mu(A) = 0$ alors A n'est pas dans le support de μ et donc $z_1 \in A$ n'est pas dans le support de μ, ce qui est absurde. De même, si $\mu(A) = 1$ alors $\mu(B) = 0$ et donc le support de μ est inclus dans A, ce qui implique que z_2 n'est pas dans le support de μ. Là encore on obtient une contradiction. Finalement $\mu(A) = \lambda \in]0, 1[$ et $\mu(B) = 1 - \lambda$. Si l'on définit μ_1 et μ_2 par $\mu_1(E) = \frac{\mu(E\cap A)}{\lambda}$ et $\mu_2(E) = \frac{\mu(E\cap B)}{1-\lambda}$ pour tout borélien E de $\mathbb{T}$, on obtient $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}$ avec $\mu = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$. Les mesures μ_1 et μ_2 sont distinctes n'ayant pas le même support. Ainsi μ n'est pas un point extrémal de $\mathcal{C}$.

6.3 Exercices du Chapitre 3

6.3.1 Rappels sur les produits infinis de nombres complexes

Définition 6.3.1 (Notion de convergence au sens strict) *On suppose que pour tout* $k \geq 1$, $u_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *On dit que le produit infini des* u_n, *noté* $\prod_{n\geq 1} u_n$, *converge strictement vers* $p \in \mathbb{C}$ *si* $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ *avec* $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *et* $p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$.

Définition 6.3.2 (Notion de convergence au sens large) *Soit* $(u_n)_{n\geq 1}$ *une suite de nombres complexes telle qu'il existe* $n_0 \geq 1$ *tel que* $u_n \neq 0$ *si* $n \geq n_0$. *Si le produit infini*

$\prod_{n\geq n_0} u_n$ *converge strictement vers* $p_1 \in \mathbb{C}^*$*, on dira que que le produit infini* $\prod_{n\geq 1} u_n$ *converge au sens large vers* p *avec* $p = u_0 u_1 \cdots u_{n_0-1} p_1$*.*

Correction de l'exercice 3.5.1

1. Soit $p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$. Comme $\lim_{n\to\infty} p_n = p \in \mathbb{C}^*$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1$. De plus, comme $\frac{p_{n+1}}{p_n} = u_{n+1}$, on obtient $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.
2. Supposons que $\prod_{n\geq 1} u_n$ converge au sens large. Il existe donc $n_0 \geq 1$ tel que $u_n \neq 0$ si $n \geq n_0$ et tel que $\prod_{n\geq n_0} u_n$ converge au sens strict vers $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour $n \geq n_0$ on définit le produit p_n par $p_n = \prod_{k\geq n_0}^{n} u_k$ de sorte que $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ avec $|p| > 0$. Alors il existe $\rho > 0$ tel que $|p_n| \geq \rho$ pour tout $n \geq n_0$. Fixons $\varepsilon > 0$. D'après le critère de Cauchy, il existe $n_\varepsilon \geq n_0$ tel que si $q > p \geq n_\varepsilon$ on ait $|P_q - P_p| < \varepsilon\rho$. Par conséquent, si $q > p \geq n_\varepsilon$ on a $\left|\frac{P_q}{P_p} - 1\right| < \frac{\varepsilon\rho}{\rho} = \varepsilon$, i.e., $|u_q u_{q-1} \cdots u_{p+1} - 1| < \varepsilon$.
   Réciproquement, supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $q > p \geq n_\varepsilon$, alors $|u_{p+1} \cdots u_q - 1| < \varepsilon$. Fixons $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$ et posons $q_n = u_{n_\varepsilon+1} \cdots u_n$ pour $n \geq n_\varepsilon + 1$. On a donc $|q_n - 1| < \varepsilon$ et ainsi $\frac{1}{2} < |q_n| < \frac{3}{2}$. Pour $m > p \geq n_\varepsilon + 1$ on a :
   $$|q_m - q_p| = |q_p| \left|\frac{q_m}{q_p} - 1\right| \leq \frac{3}{2}|u_m \cdots u_{p+1} - 1| < \frac{3}{2}\varepsilon.$$
   La suite $(q_n)_{n\geq n_\varepsilon+1}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{C}$ (complet). Elle converge donc vers $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ car $|q_n| \geq \frac{1}{2}$. Par conséquent le produit infini $\prod_{n\geq 1} u_n (= u_1 \cdots u_{n_\varepsilon} q_n)$ converge au sens large.

Correction de l'exercice 3.5.2

1. Par construction $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Il reste donc à vérifier que
   $$\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})| dt < \infty.$$
   On remarque que si $z = re^{i\theta}$ avec $r \in [0, 1[$, $\theta \in \mathbb{R}$, on a $f(z) = B(z)g(z)$ avec
   $$|g(z)| = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\varphi(e^{it})dt}\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)} = e^{P(\nu)(z)},$$

avec $d\nu(t) = \varphi(e^{it})dt + d\mu(t)$. Comme $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$, φ fonction à valeurs réelles, et comme μ est une mesure réelle de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$, on a $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, ν mesure réelle. On a donc $\log|g(z)| = P(\nu)(z)$ où ν mesure réelle de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$. D'après le Théorème 2.2.1, $\sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|\log|g(re^{it})||dt < \infty$. Comme $\log^+|g(re^{it})| \leq |\log|g(re^{it})||$, on a donc $\sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|g(re^{it})|dt < \infty$. Enfin, sachant que $\log^+(ab) \leq \log^+(a) + \log^+(b)$ pour $a, b > 0$, on obtient $\log^+|f(re^{it})| \leq \log^+|g(re^{it})| + \log^+|B(re^{it})| = \log^+|g(re^{it})|$ car $|B(re^{it})| < 1$. Ainsi $\sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(re^{it})|dt < \infty$ et donc $f \in \mathcal{N}$.

2. Le Théorème 3.4.1 nous donne l'existence d'une telle décomposition pour tout fonction $f \in \mathcal{N}$ avec $\varphi = \log|f^*|$ et $f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ qui existe m presque partout. Supposons à présent qu'il existe deux produits de Blaschke B_1 et B_2, deux fonctions φ_1, φ_2 de $L^1(\mathbb{T})$ et deux mesures réelles μ_1 et μ_2 de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ singulières par rapport à m vérifiant $f(z) = B_1(z)g_1(z) = B_2(z)g_2(z)$ avec

$$g_j(z) = e^{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\varphi_j(e^{it})dt}\, e^{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu_j(t)}, \quad 1 \leq j \leq 2.$$

Comme g_1 et g_2 ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$, il est clair que les suites des zéros de B_1 et B_2 coïncident avec la suite des zéros de f. Un produit de Blaschke étant uniquement déterminé (à une constante unimodulaire près) par la suite de ses zéros, il existe donc $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$ avec $B_1(z) = cB_2(z)$. Par conséquent les fonctions holomorphes $\frac{f}{B_1}$ et $\frac{f}{B_2}$ sont de même module, i.e., $|g_1(z)| = |g_2(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. On a donc

$$\log|g_1(z)| = P(\nu_1)(z) = P(\nu_2)(z) = \log|g_2(z)|,$$

où, pour $1 \leq j \leq 2$, ν_j mesure réelle de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ définie par avec $d\nu_j(t) = \varphi_j(e^{it})dt + d\mu_j(t)$. L'application $\nu \to P(\nu)$ étant injective (d'après le Théorème 2.2.1), $\nu_1 = \nu_2$ et d'après l'unicité de la décomposition de Radon-Nikodym de toute mesure $\nu \in \mathcal{M}$, on donc $\varphi_1 = \varphi_2$ et $\mu_1 = \mu_2$. Finalement $g_1 = g_2$ sur $\mathbb{D}$ et donc $c = 1$.

Correction de l'exercice 3.5.3

D'après le Théorème 3.4.1, il existe une mesure ν_f réelle de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ avec $\nu_f \perp m$ et un produit de Blaschke B tels que

$$f(z) = B(z)e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt}\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu_f(t)}.$$

Par conséquent, on obtient

$$g(z) = B(z)e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}(\log|f^*(e^{it})|-\log^+|f^*(e^{it})|)dt}\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d(\nu_f-\nu_f^+)(t)}.$$

Comme $\log|f^*(e^{it})|-\log^+|f^*(e^{it})| = -\log^-|f^*(e^{it})| \leq 0$ et comme $\nu_f-\nu_f^+ = -\nu_f^- \leq 0$, on en déduit $|g(z)| = |B(z)|e^{P(-\mu)(z)}$ où μ est une mesure positive de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ définie par $d\mu(t) = \log^-|f^*(e^{it}|dt + d\nu_f^-(t)$. Enfin, comme $\mu \geq 0$ et $P(-\mu) = -P(\mu)$, on a donc $P(-\mu)(z) \leq 0$ et de ce fait $|g(z)| \leq |B(z)| \leq 1$. La fonction g, étant holomorphe dans $\mathbb{D}$ et bornée en module sur $\mathbb{D}$ par 1, est bien une fonction de $H^\infty(\mathbb{D})$.

6.4 Exercices du Chapitre 4

Correction de l'exercice 4.6.1

1. Supposons f non identiquement nulle. Soit B le produit de Blaschke associé à la suite des zéros de f dans $\mathbb{D}$. D'après le Théorème 3.4.1, il existe une mesure ν réelle (finie) sur $\mathbb{T}$, $\nu \perp m$ et un réel λ tels que pour tout $z \in \mathbb{D}$ on ait :

   $$f(z) = e^{i\lambda}B(z)e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt} \times e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)}.$$

   En considérant la décomposition de Jordan de ν sous la forme $\nu = \nu^+ - \nu^-$ avec ν^+ et ν^- deux mesure positives finies sur $\mathbb{T}$ qui vérifient de plus $\nu^+, \nu^- \perp m$ (car $\nu \perp m$), on a donc

   $$f = B_1 Q_f \frac{S_{\mu^-}}{S_{\mu^+}},$$

   avec $B_1 = e^{i\lambda}B$, S_{μ^-} et S_{μ^+} fonctions intérieures singulières associées aux mesures singulières positives μ^+ et μ^- (cf. Définition 4.4.2).