Correction de l'exercice 3.5.3

D'après le Théorème 3.4.1, il existe une mesure ν_f réelle de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ avec $\nu_f \perp m$ et un produit de Blaschke B tels que

$$f(z) = B(z)e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt}\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu_f(t)}.$$

Par conséquent, on obtient

$$g(z) = B(z)e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}(\log|f^*(e^{it})|-\log^+|f^*(e^{it})|)dt}\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d(\nu_f-\nu_f^+)(t)}.$$

Comme $\log|f^*(e^{it})|-\log^+|f^*(e^{it})| = -\log^-|f^*(e^{it})| \leq 0$ et comme $\nu_f - \nu_f^+ = -\nu_f^- \leq 0$, on en déduit $|g(z)| = |B(z)|e^{P(-\mu)(z)}$ où μ est une mesure positive de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ définie par $d\mu(t) = \log^-|f^*(e^{it}|dt + d\nu_f^-(t)$. Enfin, comme $\mu \geq 0$ et $P(-\mu) = -P(\mu)$, on a donc $P(-\mu)(z) \leq 0$ et de ce fait $|g(z)| \leq |B(z)| \leq 1$. La fonction g, étant holomorphe dans $\mathbb{D}$ et bornée en module sur $\mathbb{D}$ par 1, est bien une fonction de $H^\infty(\mathbb{D})$.

6.4 Exercices du Chapitre 4

Correction de l'exercice 4.6.1

1. Supposons f non identiquement nulle. Soit B le produit de Blaschke associé à la suite des zéros de f dans $\mathbb{D}$. D'après le Théorème 3.4.1, il existe une mesure ν réelle (finie) sur $\mathbb{T}$, $\nu \perp m$ et un réel λ tels que pour tout $z \in \mathbb{D}$ on ait :

$$f(z) = e^{i\lambda}B(z)e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt} \times e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)}.$$

En considérant la décomposition de Jordan de ν sous la forme $\nu = \nu^+ - \nu^-$ avec ν^+ et ν^- deux mesure positives finies sur $\mathbb{T}$ qui vérifient de plus $\nu^+, \nu^- \perp m$ (car $\nu \perp m$), on a donc

$$f = B_1 Q_f \frac{S_{\mu^-}}{S_{\mu^+}},$$

avec $B_1 = e^{i\lambda}B$, S_{μ^-} et S_{μ^+} fonctions intérieures singulières associées aux mesures singulières positives μ^+ et μ^- (cf. Définition 4.4.2).

2. Réciproquement, si $f = B\dfrac{S_1}{S_2}Q$, où Q est extérieure et S_1, S_2 intérieures singulières, alors $f \in \mathcal{N}$. En effet, par construction, $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ et si $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on a :
$$|f(z)| = |B(z)|e^{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)},$$
avec μ mesure complexe sur $[0, 2\pi]$ définie par $d\mu(t) = \log\varphi(e^{it})dt + d(\nu_1 - \nu_2)(t)$ où $\varphi \geq 0$, $\log\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ et ν_1, ν_2 mesure positive finie singulières par rapport à m. Comme $\log^+(ab) \leq \log^+ a + \log^+ b$ et comme $\log^+|B(z)| = 0$ puisque $|B(z)| \leq 1$ pour $z \in \mathbb{D}$, on a donc
$$\log^+|f(z)| \leq \log^+\left(e^{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)}\right).$$
De plus, comme $\log^+ a \leq |\log a|$, on obtient :
$$\log^+|f(z)| \leq \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d|\mu|(t).$$
Finalement, $\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta \leq \|\mu\| < \infty$, et donc $f \in \mathcal{N}$.

Correction de l'exercice 4.6.2

1. D'après le Théorème 4.4.3, si $f \in H^p(\mathbb{D})$ avec $p \in]0, \infty]$, il existe une fonction intérieure U_f telle que $f = U_f Q_f$ avec Q_f facteur extérieur de f appartient à $H^p(\mathbb{D})$ et défini par
$$Q_f(z) = e^{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt}.$$
Comme $|U_f(z)| \leq 1$ pour $z \in \mathbb{D}$, on a donc $|f(z)| \leq |Q_f(z)|$. Or
$$|Q_f(z)| = e^{Re\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt\right)} = e^{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log|f^*(e^{it})|dt},$$
si $z = re^{i\theta}$. On obtient donc l'inégalité demandée, cette inégalité étant triviale si $f(z) = 0$.

2. Si f est extérieure, on a donc $f(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log|f^*(e^{it})|dt}$, ce qui implique $\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log|f^*(e^{it})|dt$ pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$. Réciproquement, supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$ pour un certain $p \in]0, \infty]$ et supposons qu'il existe $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in \mathbb{D}$ tel que
$$\log|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{r_0}(\theta_0 - t)\log|f^*(e^{it})|dt. \tag{6.3}$$
Comme nous l'avons déjà mentionné, le fait que $f \in H^p(\mathbb{D})$, implique que $f = U_f Q_f$ avec U_f fonction intérieure et Q_f défini comme ci-dessus. L'égalité (6.3) signifie $|f(z_0)| = |Q_f(z_0)|$, ce qui implique $|U_f(z_0)| = 1$. La fonction U_f étant intérieure, d'après le principe du maximum, ceci n'est possible que si U_f est constante. Par conséquent f est extérieure.

3. La réciproque est fausse. En effet, soit $f \in \mathcal{N}$ de la forme
$$f(z) = B(z)Q_f(z)e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d(-2\pi\log|B(0)|\delta_0)(t)},$$
où $B(z)$ est un produit de Blaschke non constant ne s'annulant pas en 0, où la mesure définie par $-2\pi\log|B(0)|\delta_0$ est une mesure positive finie singulière par rapport à la mesure de Lebesgue et avec Q_f facteur extérieur de f. D'après le Théorème 3.2.1 ou encore d'après l'Exercice 4.6.1, il est facile de voir que $f \in \mathcal{N}$. Par construction, on vérifie aussi aisément que
$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f^*(e^{it})|dt.$$
D'autre part, il est aussi très clair que f n'est pas extérieure puisqu'elle s'annule sur $\mathbb{D}$.

Correction de l'exercice 4.6.3

Pour $z \in \mathbb{D}$, posons $F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - ze^{-it}} d\mu(t)$. Pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on remarque que
$$\frac{1}{1 - ze^{-it}} = \sum_{n\geq 0} r^n e^{in(\theta - t)}.$$

Comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^n e^{in(\theta-t)}$ converge normalement, donc uniformément par rapport à t dès que $r<1$, si $z=re^{i\theta}$, on obtient :

$$F(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^n e^{in(\theta-t)}d\mu(t)=\sum_{n\geq 0}\hat{\mu}(n)z^n.$$

La fonction F est holomorphe sur $\mathbb{D}$. L'hypothèse faite sur μ nous permet d'affirmer que

$$F(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^n e^{in(\theta-t)}d\mu(t).$$

Toujours par convergence normale, donc uniforme en t de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^n e^{in(\theta-t)}$, nous avons finalement :

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^n e^{in(\theta-t)}d\mu(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)d\mu(t)=P(d\mu)(z).$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta})|d\theta &= \int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)d\mu(t)\right|d\theta\\
&\leq \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)d|\mu|(t)\right)d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)d\theta\right)d|\mu|(t)\\
&= \|\mu\|<\infty.
\end{aligned}$$

On a donc $F\in H^1(\mathbb{D})$ avec $\|F\|_1\leq\|\mu\|$. D'après le Théorème 4.5.3, nous savons que F est l'intégrale de Poisson de sa limite radiale $F^*\in L^1(\mathbb{T})$. D'après le Théorème 2.2.1, l'application définie sur l'ensemble des mesures complexes sur $[0,2\pi]$ par $\nu\longmapsto P(d\nu)$ est injective. Ainsi $d\mu(t)=F^*(e^{it})dt$, et ainsi $\mu\ll m$.

6.5 Exercices du Chapitre 5

Correction de l'exercice 5.4.1

1. Soient $\alpha=(\alpha_n)_{n\geq 0}$ et $\beta=(\beta_n)_{n\geq 0}$ deux éléments arbitraires de ℓ^2. L'opérateur T^* est défini par la formule

$$<T(\alpha),\beta>=<\alpha,T^*(\beta)>.$$