Chapitre 4

Opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert

4.1 Adjoint d'une application linéaire continue entre espaces de Hilbert

On commence avec la notion d'adjoint ; plusieurs des classes particulières d'opérateurs bornés seront définies à l'aide de cette notion.

Proposition 4.1.1 *Soient E et F des espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on ait :*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle.$$

On a de plus $\|T^*\| = \|T\|$.

Preuve : Pour tout $y \in F$ l'application $x \longmapsto \langle T(x), y \rangle$ est linéaire et continue (de norme inférieure à $\|T\|\|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique élément noté $T^*(y)$ tel que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle.$$

On vérifie facilement que pour tous $y, z \in F$ et λ scalaire, $T^*(y) + \lambda T^*(z)$ vérifie la propriété qui définit $T^*(y + \lambda z)$. Par unicité, $T^*(y) + \lambda T^*(z) = T^*(y + \lambda z)$, ce qui prouve que T^* est linéaire.

Par définition de la norme opérateur,

$$\|T^*\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|T^*(y)\|.$$

Corollaire d'Hahn-Banach, $\|T^*(y)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, T^* y\rangle|$. De plus, comme $\langle x, T^* y\rangle = \langle T(x), y\rangle$, on obtient

$$\|T^*\| = \sup_{\|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |\langle T(x), y\rangle|.$$

En appliquant de nouveau un corollaire d'Hahn-Banach et la définition de la norme opérateur de T on obtient :

$$\sup_{\|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |\langle T(x), y\rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \|T\|,$$

ce qui prouve que T^* est aussi continue.

$\square$

Définition 4.1.1 *Soient E et F deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. L'unique application linéaire $T^* \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que pour tous $x \in E, y \in F$ on ait*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

est appelée ***adjointe*** *de T.*

Regroupons dans la proposition suivante quelques propriétés des adjoints.

Proposition 4.1.2 *Soient E et F des espaces de Hilbert. L'application $T \longmapsto T^*$ est antilinéaire et isométrique de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F, E)$. De plus, $\forall T \in \mathcal{L}(E, F)$, $(T^*)^* = T$ et $\|T^* T\| = \|T\|^2$. Enfin $(TS)^* = S^* T^*$.*

Preuve : Par définition du produit scalaire et de l'adjoint, pour tous $x \in E, y \in F$, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle x, (T_1 + \lambda T_2)^*(y)\rangle &= \langle (T_1 + \lambda T_2)(x), y\rangle \\
&= \langle T_1(x), y\rangle + \lambda \langle T_2(x), y\rangle \\
&= \langle x, (T_1)^*(y)\rangle + \langle x, \overline{\lambda} T_2^*(y)\rangle \\
&= \langle x, (T_1^* + \overline{\lambda} T_2^*)(y)\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi $T \longmapsto T^*$ est antilinéaire. Elle est isométrique d'après la proposition 4.1.1. Montrons que $(T^*)^* = T$. Pour cela on montre que pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a $\langle T(x), y\rangle = \langle (T^*)^*(x), y\rangle$. On a

$$\begin{aligned}\langle T(x), y\rangle &= \langle x, T^*(y)\rangle \\ &= \overline{\langle T^*(y), x\rangle} \\ &= \overline{\langle y, (T^*)^*(x)\rangle} \\ &= \langle (T^*)^*(x), y\rangle.\end{aligned}$$

Montrons que $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Tout d'abord on rapelle que la norme opérateur est une norme d'algèbre et donc, en particulier, $\|T^*T\| \leq \|T\|\|T^*\| = \|T\|^2$. D'autre part, en utilisant encore une fois de plus un corollaire d'Hahn-Banach et la définition de la norme opérateur, on obtient :

$$\begin{aligned}\|T^*T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|T^*T(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle T^*T(x), y\rangle| \\ &\geq \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^*T(x), x\rangle| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T(x), T(x)\rangle| \\ &= \|T\|^2.\end{aligned}$$

On a donc l'égalité $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Enfin, pour vérifier que $(TS)^* = S^*T^*$, il suffit de montrer que pour tous $x \in E$ et $y \in F$ on a $\langle (TS)^*(x), y\rangle = \langle S^*T^*(x), y\rangle$. On a, par défintion de l'adjoint,

$$\begin{aligned}\langle (TS)^*(x), y\rangle &= \langle x, (TS)(y)\rangle \\ &= \langle T^*(x), S(y)\rangle \\ &= \langle S^*T^*(x), y\rangle.\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tous vecteurs x, y, on a l'égalité $(TS)^* = S^*T^*$.

$\square$

Exemples d'opérateurs et calculs de leur adjoint

1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable admettant une base orthonormale $(h_n)_n$. Soit $\alpha = (\alpha_n)_n$ une suite bornée de nombres complexes. On définit Δ_α sur $\mathcal{H}$ par
$$\forall c = (c_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}), \Delta_\alpha\left(\sum_{n\geq 0} c_n h_n\right) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n c_n h_n.$$
L'application linéaire Δ_α est dite **diagonale** car elle admet une représentation matricielle diagonale relativement à la base $(h_n)_n$, avec $(\alpha_n)_n$ sur sa diagonale . On vérifie que Δ_α est continue, de norme $\|\alpha\|_\infty$. De plus $\Delta_\alpha^* = \Delta_{\overline{\alpha}}$, où $\overline{\alpha}$ est la suite des nombres conjugés de la suite α.
2. Soit $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mu)$ et $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Soit M_f définie par
$$M_f(g) = fg.$$
On vérifie que M_f est linéaire, continue, de norme $\|f\|_\infty$ et $M_f^* = M_{\overline{f}}$.
3. Le shift (opérateur de décalage à droite) sur $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ ou $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$ est l'application linéaire définie par
$$(S(x))_n = x_{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ ou } n \in \mathbb{Z},$$
avec la convention $x_{-1} = 0$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.
On vérifie que S est de norme 1. De plus S^* est défini par $(S^*(y))_n = y_{n+1}$. En fait $S^* = S^{-1}$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Par contre S n'est pas inversible sur $\ell^2(\mathbb{N})$, il est simplement inversible à droite avec $S^*S = Id$.

Proposition 4.1.3 *Soient E et F deux espaces de Hilbert et soint $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors*
$$F = \ker(T^*) \oplus^\perp (Im(T))^- \textit{ et } E = \ker(T) \oplus^\perp (Im(T^*))^-,$$
où $(Im(T))^-$ et $(Im(T^*))^-$ désignent la fermeture (pour la norme) de $Im(T)$ et $Im(T^*)$ respectivement.

Preuve : Il suffit de prouver la première assertion, la seconde s'obtenant en échangeant le rôle de T et T^*. On a les équivalences suivantes :

$$y \in \ker T^* \Longleftrightarrow \forall x \in E, \langle T^*(y), x\rangle = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in E, \langle y, T(x)\rangle = 0 \Longleftrightarrow y \perp Im(T).$$

La continuité du produit scalaire (conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), implique que

$$y \perp Im(T) \Longleftrightarrow y \perp Im(T)^-.$$

Ainsi l'orthogonal de $\ker T^*$ est l'adhérence de l'image de T.

$\square$

4.2 Opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, autoadjoints

Définition 4.2.1 *Soient E et F deux espaces de Hilbert. Lorsque $E = F$, $\mathcal{L}(E, F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.*

1. *Un élément $U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé **unitaire** si $U^*U = Id_E$ et $UU^* = Id_F$.*
2. *Un élément $U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé **isométrique** si $\|U(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.*
3. *Un élément $N \in \mathcal{L}(E)$ est appelé **normal** si $NN^* = N^*N$.*
4. *Un élément $S \in \mathcal{L}(E)$ est appelé **hermitien** ou **auto-adjoint** si $S = S^*$.*
5. *Un élément $P \in \mathcal{L}(E)$ est appelé **positif** (notation : $P \geq 0$) si P est autoadjoint et si pour tout $x \in E$ $\langle P(x), x\rangle \geq 0$.*

Exemples d'opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, autoadjoints

1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un **projecteur orthogonal**. Notons F son image. Alors P est auto-adjoint. En effet, pour tous $x, x' \in F$

et $y, y' \in F^{\perp}$,

$$\langle P(x+y), x'+y' \rangle = \langle x, x' \rangle = \langle x+y, P(x'+y') \rangle.$$

De plus $\langle P(x+y), x+y \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \geq 0$ pour tous $x \in F$ et $y \in F^{\perp}$. Ainsi $P \geq 0$.

2. Les opérateurs diagonaux Δ_α et M_f définis précédemment sont normaux. En effet

$$\Delta_\alpha \Delta_\alpha^* = \Delta_\alpha \Delta_{\overline{\alpha}} = \Delta_\beta = \Delta_{\overline{\alpha}} \Delta_\alpha = \Delta_\alpha^* \Delta_\alpha,$$

où $\beta = (\beta_n)_n$ est la suite définie par $\beta_n = |\alpha_n|^2$. D'autre part,

$$M_f M_f^* = M_f M_{\overline{f}} = M_{|f|^2} = M_f^* M_f.$$

3. Le shift S sur $\ell^2(\mathbb{N})$ est isométrique, le shift S sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ est unitaire.

4. Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $T^*T \in \mathcal{L}(E)$ est hermitien car $(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T$ d'après la proposition 4.1.2. De plus $T^*T \geq 0$ car, pour tout $x \in E$, $\langle T^*Tx, x \rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$. En particulier $A^2 \geq 0$ dès que $A = A^*$.

Proposition 4.2.1 *Soient E et F deux espaces de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Sont équivalents :*

1. T est isométrique.

2. $T^*T = Id_E$.

Sont équivalents :

1. T est unitaire.

2. T est surjective et $T^*T = Id_E$.

3. T est une isométrie surjective.

Preuve : Montrons la première équivalence. Supposons que T est isométrique. Montrer que $T^*T = Id_E$ revient à montrer que pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle T^*T(x), y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Rappelons l'identité de polarisation, à savoir,

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle + i\langle u+iv, u+iv\rangle - i\langle u-iv, u-iv\rangle),$$

pour un Hilbert complexe et

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle),$$

pour un Hilbert réel. En particulier,

$$\langle T^*T(x), y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle = \frac{1}{4}(\|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2 + i\|T(x+iy)\|^2 - i\|T(x-iy)\|^2).$$

Comme $\|T(u)\| = \|u\|$, on en déduit :

$$\langle T^*T(x), y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) = \langle x, y\rangle.$$

Réciproquement, supposons que $T^*T = Id_E$. Ceci implique que pour tout $x \in E$,

$$\langle T^*T(x), x\rangle = \langle x, x\rangle.$$

On en déduit immédiatement pour tout $x \in E$,

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2,$$

ce qui prouve que T est bien isométrique.
Pour la preuve des trois autres équivalences, les implications 1. implique 2. et 2. implique 3. sont évidentes. Pour montrer que 3. implique 1., on remarque qu'une isométrie linéaire est injective et donc les hypothèses de 3. impliquent que T^{-1} existe. De plus, T étant une isométrie, on a $T^*T = Id_E$. En composant à droite par T^{-1}, on obtient $T^* = T^{-1}$.

□

4.3 Spectre des applications linéaires et continues

Soit E un espace de Banach complexe et soit $\mathcal{R}(T)$ l'ensemble résolvant de T défini comme le complément du spectre de T, où nous rappelons que le spectre de T est défini par

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda Id) \text{ non inversible}\}.$$

Nous allons tout d'abord établir la nature topologique du spectre.

Théorème 4.3.1 *Le spectre de tout opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$.*

Preuve : Le spectre de T est borné car si $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $|\lambda - > \|T\|$, alors $T - \lambda Id$ est inversible. En effet, $\lambda Id - T = \lambda(Id - T/\lambda)$ avec $\|T\|/|\lambda| < 1$. D'où $(Id - T/\lambda)^{-1} = \sum_{n\geq 0} T^n/\lambda^n$, car on vérifie que

$$(Id - T/\lambda)\sum_{n\geq 0} T^n/\lambda^n = Id = (\sum_{n\geq 0} T^n/\lambda^n)(Id - T/\lambda).$$

Pour montrer que $\sigma(T)$ est fermé, on va montrer que $\mathcal{R}(T)$ est ouvert. Pour cela, on montre tout d'abord que $Inv(\mathcal{L}(\mathcal{H})) := \{S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) :$ inversible$\}$ est ouvert. On observe tout d'abord que si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ vérifie $\|T - Id\| < 1$, alors T est inversible. En effet $T = Id + (T - Id) = Id - H$ où $\|H\| < 1$, ce qui implique que $T^{-1} = \sum_{n\geq 0} H^n$, la série des normes étant convergente. Soit à présent $T_0 \in Inv(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ et soit T tel que $\|T_0 - T\| < 1/\|T_0\|^{-1}$. Alors $T \in Inv(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$. En effet, $T = T_0T_0^{-1}T$ avec

$$T_0^{-1}T - Id\| = \|T_0^{-1}T - T_0^{-1}T_0\| \leq \|T_0^{-1}\|\|T - T_0\| < 1.$$

Ainsi, $T_0^{-1}T$ est inversible, ce qui implique aussi que $T = T_0T_0^{-1}T$ l'est aussi. Ceci achève la preuve du fait que $Inv(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ est ouvert.

Considérons à présent l'application $f : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ définie par $f(\lambda) = \lambda Id - T$. Alors f est continue et $\mathcal{R}(T) = f^{-1}(Inv(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Ainsi $\mathcal{R}(T)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. Nous pouvons en conclure que $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$.

Vérifions que $\sigma(T)$ est non vide. Pour cela on va utiliser **l'identité de la résolvante** : si λ et λ_0 sont dans $\mathcal{R}(T)$, alors

$$(T - \lambda Id)^{-1} - (T - \lambda_0 Id)^{-1} = (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda Id)^{-1}(T - \lambda_0 Id)^{-1}.$$

Cette identité se démontre très facilement en remarquant que

$$(T-\lambda Id)((T-\lambda Id)^{-1}-(T-\lambda_0 Id)^{-1})(T-\lambda_0 Id) = T-\lambda_0 Id-T+\lambda Id = (\lambda-\lambda_0)Id.$$

Par conséquent

$$frac(T-\lambda Id)^{-1}-(T-\lambda_0 Id)^{-1}\lambda-\lambda_0 = (T-\lambda Id)^{-1}(T-\lambda_0 Id)^{-1},$$

qui converge vers $(T-\lambda_0 Id)^{-2}$ lorsque λ tend vers λ_0. Ainsi $z \mapsto (T-zId)^{-1}$ est une fonction holomorphe de $\mathcal{R}(T)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Supposons que $\sigma(T)=\emptyset$, ce qui implique $\mathcal{R}(T)=\mathbb{C}$. Dans ce cas $z \mapsto (T-zId)^{-1}$ est une fonction entière. De plus, si $|z| > \|T\|$,

$$(zId-T)^{-1} = (z(Id-T/z))^{-1} = \frac{1}{z}(\sum_{n\geq 0} T^n/\lambda^n).$$

Par conséquent

$$\|(zId-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|z|}\frac{1}{1-\|T\|/|z|} = \frac{1}{|z|-\|T\|}.$$

En particulier, $\lim_{|z|\to\infty}\|(zId-T)^{-1}\| = 0$. La fonction entière $z \mapsto (zId-T)^{-1}$ est donc une fonction entière et bornée. Nous allons appliquer le théorème de Liouville, vu pour les fonctions complexes.

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*$. Posons $f_\varphi(z) = \varphi((T-zId)^{-1})$ fonction holomorphe de $\mathcal{R}(T)=\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et bornée, par continuité de φ. D'après le théorème de Liouville, f_φ est constante et donc identiquement nulle car $\lim_{|z|\to\infty}\varphi((T-zId)^{-1}) = 0$. Comme $f_\varphi = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*$, $z \mapsto (T-zId)^{-1}$ est aussi identiquement nulle, puisque $\|(T-zId)^{-1}\| = \sup_{\varphi\in\mathcal{L}(\mathcal{H})^*, \|\varphi\|\leq 1}|\varphi((T-zId)^{-1})|$. On obtient une contradiction, qui implique que le spectre de T est nécessairement non vide.

$\square$

Nous allons à présent établir le théorème spectral suivant.

Théorème 4.3.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

1. *Si T est inversible, alors $\sigma(T^{-1}) = \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$.*

2. $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$ *pour tout polynôme* $p \in \mathbb{C}[X]$.

Preuve : 1. Soit $\lambda \in \sigma(T^{-1})$. Comme T^{-1} est inversible, nécessairement $\lambda \neq 0$. Comme $T^{-1} - \lambda Id$ est non inversible et comme $T^{-1} - \lambda Id = \lambda T^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}Id - T\right)^{-1}$, l'opérateur $\left(\frac{1}{\lambda}Id - T\right)^{-1}$ est non inversible, i.e. $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T)$. On a donc montré que $\sigma(T^{-1}) \subset \sigma(T)^{-1} := \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$. En échangeant le rôle de T et T^{-1} on obtient l'inclusion réciproque $\sigma(T)^{-1} \subset \sigma(T^{-1})$, ce qui achève la preuve de la première assertion.
2. Montrons tout d'abord que $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$. Soit $\lambda \in \sigma(T)$. Comme le polynôme $p(X)-p(\lambda)$ s'annule en λ, il existe un polynôme q tel que $p(X)-p(\lambda) = (X - \lambda)q(X)$, ce qui donne

$$p(T) - p(\lambda)Id = (T - \lambda Id)q(T).$$

Si $p(T)-p(\lambda)Id$ était inversible, $(T-\lambda Id)$ serait aussi inversible, d'inverse $(p(T)-p(\lambda)Id)^{-1}q(T)$, ce qui est contraire aux hypothèses. On obtient donc que $p(\lambda) \in \sigma(p(T))$, montrant que $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$.
Montrons ensuite que $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$. Si p est identiquement nul, l'inclusion est travialement vérifiée. Soit $\lambda \in \sigma(p(T))$. On factorise dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $p(X) - \lambda$ sous la forme :

$$p(X) - p(\lambda) = \alpha(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_n),$$

où les α_i, $i = 1, \cdots, n$ désignent les racines de $p(X) - \lambda$, et où $\alpha \neq 0$ car p est non identiquement nul. Si pour tout $i = 1, \cdots, n$ l'opérateur $T - \alpha_i Id$ est inversible, $p(T) - \lambda Id$ est aussi inversible. Par conséquent il existe un indice $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $T - \alpha_i Id$ est non inversible, i.e. $\alpha_i \in \sigma(T)$. On en déduit que $\lambda = p(\alpha_i) \in p(\sigma(T))$, prouvant que $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$.

□

Le dernier résultat que nous allons établir concerne le calcul explicite du module du plus grand élément du spectre, appeleé le **rayon spectral**.

Théorème 4.3.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors $\sigma(T) \subset \overline{D}(O, \rho(T))$ où $\rho(T)$ est défini par* $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ *et est aussi égal à* $\inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{1/n}$*, qui coïncide aussi avec* $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$.

Preuve : Notons $\alpha := \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{1/n}$. Soit $\lambda \in \sigma(T)$. D'aprÃ¨s la seconde assertion du Théorème 4.3.2, $\lambda^n \in \sigma(T^n)$. Ainsi $|\lambda^n| \leq \|T^n\|$, ce qui implique $|\lambda| \leq \|T^n\|^{1/n}$. Ainsi $\rho(T) \leq \alpha := \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{1/n}$. De plus

$$\alpha \leq \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \rho(T).$$

Pour cela nous allons utiliser la théorie des fonctions holomorphes et des séries entières. Notons Ω le disque ouvert centré en 0 et de rayon $\frac{1}{\rho(T)}$, avec la convention $\Omega = \mathbb{C}$ si $\rho(T) = 0$. ConsidÂ érons la fonction $f : \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ définie par $f(0) = 0$ et $f(\lambda) = \left(T - \frac{1}{\lambda} Id\right)^{-1}$ pour tout $\lambda \in \Omega \setminus \{0\}$. La fonction f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{0\}$ et nous avons déjà remarqué dans la preuve du Théorème 4.3.1 que $\lim_{\lambda\to 0} f(\lambda) = 0$. La fonction f est donc continue sur Ω, ce qui implique que f est en fait holomorphe sur Ω. De plus, si $0 < |\lambda| < \frac{1}{\|T\|}$, on a

$$f(\lambda) = -\lambda(Id - \lambda T)^{-1} = -\lambda \sum_{n\geq 0} \lambda^{n+1} T^n,$$

égalité qui reste trivialement vraie pour $\lambda = 0$. Par conséquent, si $|\lambda| < \frac{1}{\|T\|}$, $f(\lambda) = -\lambda \sum_{n\geq 0} \lambda^{n+1} T^n$. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \lambda^{n+1} T^n$. Comme f est holomorphe sur Ω, $R \geq dist(0, \Omega^c) = \frac{1}{\rho(T)}$. De plus, d'après la formule d'Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Finalement $\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \rho(T)$, ce qui achève la preuve du théorème.

□

4.4 Exercices, compléments de cours

Exercice 4.4.1 (théorème de Hellinger-Toeplitz) *Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ une application linéaire telle que pour tous $x, y \in H$:*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle.$$

Montrer qu'alors T est continue et autoadjoint.

Exercice 4.4.2 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur normal. Montrer que $\|T^2\| = \|T\|^2$.*

Exercice 4.4.3 *Soit E un espace de Hilbert complexe et soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si pour tout $x \in E$ on a $\langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}$, nécessairement T est auto-adjoint.*

Ainsi, lorsque E est un Hilbert sur $\mathbb{C}$ un opérateur $P \in \mathcal{L}(E)$ est positif si et seulement si pour tout $x \in E$ on a $\langle P(x), x \rangle \geq 0$.

Exercice 4.4.4 *Soit E un espace de Hilbert complexe et soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $T = 0$ si et seulement si $\langle T(x), x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$.*
Montrer que ce résultat est faux sur un espace de Hilbert réel.

Exercice 4.4.5 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur autoadjoint. Montrer que*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T(x), x \rangle|.$$

Indication : considérer $\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle$.
Que peut-on en déduire d'après l'exercice 4.4.4 ?

Exercice 4.4.6 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est normal.*
2. *pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle T^*(x), T^*(y) \rangle$.*

3. pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$.

Exercice 4.4.7 *Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ la base orthonormale canonique de $\ell^2(\mathbb{N})$. Soit S l'opérateur défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par*

$$S(e_n) = e_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*On appelle S le **shift unilatéral**.*

1. *Déterminer le spectre de S^*.*
2. *Montrer que le spectre de S est le disque unité fermé.*
3. *Est-ce que S possède des valeurs propres ?*

Exercice 4.4.8 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur **normal**, c'est-à-dire vérifiant $T^*T = TT^*$.*

1. *Montrer que le rayon spectral de T est égal à $\|T\|$.*
2. *Montrer que si le spectre de T est réduit à $\{0\}$, alors T est identiquement nul.*

Exercice 4.4.9 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur **compact** et **normal**. Montrer que T possède une valeur propre λ telle que $|\lambda| = \|T\|$.*