Chapitre 5

Opérateurs compacts

5.1 Applications linéaires compactes

Définition 5.1.1 *Soient E et F deux espaces de Banach ; une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est dite* ***compacte*** *si l'image $T(\overline{B}_E)$ par l'application T de la boule unité fermée $\overline{B}_E$ de l'espace E est* ***relativement compacte*** *(en norme) dans F. On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F. On pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E,E)$.*

La proposition suivante donne des propriétés fondamentales de stabilité des opérateurs compacts.

Proposition 5.1.1 *Soient E et F deux espaces de Banach ; l'ensemble $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E,F)$. Soient E, F et G des espaces de Banach, $S \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T \in \mathcal{L}(F,G)$; si S ou T est compacte alors TS est compacte. En particulier, $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.*

Preuve : Il est clair que si $T \in \mathcal{K}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda T \in \mathcal{K}(E,F)$. Soient maintenant T_1 et T_2 deux applications linéaires compactes de E dans F, et considérons les ensembles $A_1 = T_1(\overline{B}_E), A_2 = T_2(\overline{B}_E)$ et $A = (T_1 + T_2)(\overline{B}_E)$; il est clair que A est contenu dans $A_1 + A_2$, donc il est relativement compact d'après une proposition des prérequis sur le compacts. Ceci montre que $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$. Supposons que $T \in \mathcal{L}(E,F)$

soit adhérent à $\mathcal{K}(E, F)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver S compacte telle que $\|T - S\| < \varepsilon$; il en résulte que tout point de $T(\overline{B}_E)$ est approché à ε près par un point du compact $K = \overline{S(\overline{B}_E)}$, donc T est compact. Montrons pour finir les propriétés de composition. Supposons $S \in \mathcal{L}(E, F)$ compacte ; si $K \subset F$ est compact et contient l'image $S(\overline{B}_E)$, alors $T(K)$ est compact et contient l'image $TS(\overline{B}_E)$, donc TS est compacte. Pour l'autre cas, remarquons que l'image $S(\overline{B}_E)$ est contenue dans la boule de F de centre 0 et de rayon $r = \|S\|$; si $K \subset G$ est compact et contient l'image par T de la boule unité de F, alors rK est compact et contient l'image par ST de $\overline{B}_E$.

□

Remarque 5.1.1 *Il est clair que tout opérateur T de rang fini est compact : en effet, l'ensemble $T(\overline{B}_E)$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie. D'après le résultat précédent, toute limite T en norme d'opérateur d'une suite $(T_n)_n$ d'opérateurs de rang fini est compacte. C'est une méthode assez efficace pour vérifier que certains opérateurs sont compacts.*

Proposition 5.1.2 *Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$; notons $\overline{B}_E$ la boule unité fermée de E.*

Supposons T compact ; alors pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E convergeant faiblement vers 0 la suite $(T(x_n))_n$ converge en norme vers 0.

Preuve : Supposons T compact, et soit K un compact de F contenant $T(\overline{B}_E)$; l'identité, de K muni de la topologie de la norme, dans K muni de la topologie faible est continue ; comme K est compact, c'est un homéomorphisme. Comme T est continu de $\overline{B}_E$ muni de la topologie faible dans K muni de la topologie faible, il en résulte que T est continu de $\overline{B}_E$ faible dans F muni de la norme. Si $(x_n)_n$ est une suite qui converge faiblement vers 0 dans E, via le théorème de Banach–Steinhauss, elle est bornée dans E, donc $(T(x_n))_n$ tend vers 0 en norme par ce qui précède.

□

Théorème 5.1.1 *Soit E un espace de Banach. Pour $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $T \in \mathcal{K}(E)$;
2. $T^* \in \mathcal{K}(E^*)$.

Preuve : Tout d'abord, rappelons que T^* est défini grâce à la relation suivante :

$$\langle T^* x^*, x\rangle = \langle x^*, Tx\rangle,$$

pour tout $x^* \in E^*$ et $x \in E$. Ainsi

$$\|T^* x^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^* x^*, x\rangle| = \sup_{\|x\|\leq 1} ||\langle x^*, Tx\rangle|,$$

avec $|\langle x^*, Tx\rangle| \leq \|x^*\|\|Tx\| \leq \|x^*\|\|T\|\|x\|$. Ainsi, nous avons

$$\|T^* x^*\| \leq \|T\|\|x^*\| \text{ et donc } \|T^*\| \leq \|T\|,$$

ce qui prouve en particulier la continuité de T^* comme application linéaire de E^* dans E^*.
Supposons à présent $T \in \mathcal{K}(E)$ et montrons que $T^* \in \mathcal{K}(E^*)$. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de la boule unité fermé de E^*. Nous voulons montrer que l'on peut extraire une sous-suite convergente.

□

Dans le cas où l'espace de départ est hilbertien, on peut donner des caractérisations plus précises de la compacité.

Théorème 5.1.2 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; notons $\overline{B}_{\mathcal{H}}$ la boule unité fermée de $\mathcal{H}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *l'opérateur T est adhérent (en norme d'opérateur) à l'espace des applications linéaires continues de rang fini ;*

2. *l'opérateur T est compact de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$;*

3. *l'ensemble $T(\overline{B}_{\mathcal{H}})$ est compact (en norme) dans $\mathcal{H}$;*

4. *pour toute suite (x_n) de points de $\mathcal{H}$ convergeant faiblement vers 0, la suite $(T(x_n))_n$ converge en norme vers 0 ;*

5. *pour tout système orthonormal $(e_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{H}$ on $\lim_{n\to\infty} \|T(e_n)\| = 0$.*

Preuve : 1. $\Rightarrow$ 2. : c'est une conséquence immédiate du fait que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est fermé pour la norme opérateur.

2. $\Rightarrow$ 3. : comme $\mathcal{H}$ est un espace **réflexif**, la boule unité fermée de $\mathcal{H}$ est **faiblement compact**. Comme T est compact, pour toute suite $(x_n)_n$ de $\overline{B}_{\mathcal{H}}$, il existe une sous-suite $(T(x_{n_k}))_k$ convergente vers $y \in \mathcal{H}$. Nous allons montrer que $y \in T(\overline{B}_{\mathcal{H}})$. Comme $(x_{n_k})_k$ est dans $\overline{B}_{\mathcal{H}}$ qui est faiblement compact, il existe une sous-suite $(x_{n_{k_l}})_{k_l}$ convergeant faiblement vers $x \in \overline{B}_{\mathcal{H}}$. Alors pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a

$$\langle x_{n_{k_l}}, T^*(z)\rangle \to \langle x, T^*(z)\rangle = \langle T(x), z\rangle,$$

et

$$\langle x_{n_{k_l}}, T^*(z)\rangle = \langle T(x_{n_{k_l}}), z\rangle \to \langle y, z\rangle.$$

On a donc $T(x) = y$, prouvant que $T(\overline{B}_{\mathcal{H}})$ est compact (en norme) dans $\mathcal{H}$.

3. $\Rightarrow$ 4. : soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathcal{H}$ convergeant faiblement vers 0. Alors $(x_n)_n$ est bornée. En effet, posons $T_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $T_n(x) = \langle x, x_n\rangle$. Alors T_n est une application linéaire continue de norme $\|x_n\|$ tel que pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\lim_{n\to\infty} |T_n(x)| = 0$. D'après le théorème de Banach–Steinhaus, $\sup_n \|T_n\| = \sup_n \|x_n\| < \infty$. Quitte à diviser par une constante, on peut supposer que la suite $(x_n)_n$ est dans $\overline{B}_{\mathcal{H}}$. Ainsi il existe une sous-suite $(T(x_{n_k})_k$ convergente en norme vers disons z. Mais comme $(x_n)_n$ converge faiblement vers 0, on a aussi $\langle x_{n_k}, T^*(z)\rangle \to 0$ et $\langle x_{n_k}, T^*(z)\rangle = \langle T(x_{n_k}), z\rangle \to \|z\|^2$. Ainsi $(T(x_{n_k})_k \to 0$. Ceci prouve que la seule valeur d'adhérence (pour la norme) de la suite $(T(x_n))_n$ est 0, et donc $\|T(x_n)\| \to 0$ dès que $(x_n)_n$ tend faiblement vers 0.

4. $\Rightarrow$ 5. : toute suite orthonormale $(e_n)_n$ est une suite convergeant faiblement vers 0. En effet, pour tout $y \in \mathcal{H}$, $\sum_n |\langle y, e_n \rangle|^2 \le \|y\|^2$ et donc en particulier $|\langle y, e_n \rangle| \to 0$ pour tout $y \in \mathcal{H}$.

5. $\Rightarrow$ 1. : supposons que 1. ne soit pas vérifié. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour toute application linéaire continue de rang fini R on ait $\|T-R\| > \varepsilon$. Construisons alors par récurrence sur n un système orthonormal $(e_n)_{n\ge 0}$ tel que $\|T(e_n)\| > \varepsilon$ pour tout $n \ge 0$: comme $\|T\| > \varepsilon$, il existe $e_0 \in E$ tel que $\|e_0\| = 1$ et $\|T(e_0)\| > \varepsilon$; supposons e_k construit pour $k < n$ et soit P le projecteur orthogonal sur le sous-espace de E engendré par $\{e_k : k < n\}$; alors TP est de rang fini donc $\|T - TP\| > \varepsilon$; il existe donc $y_n \in E$ tel que

$$\|T(Id_E - P)(y_n)\| > \varepsilon\|y_n\| \ge \varepsilon\|(Id_E - P)(y_n)\|.$$

On pose alors $z_n = (Id_E - P)(y_n)$, puis $e_n = \|z_n\|^{-1} z_n$. On a alors $\|T(e_n)\| = \|z_n\|^{-1}\|T(z_n)\| > \varepsilon$, prouvant que 5. n 'est pas vérifié.

□

5.2 Théorie spectrale des opérateurs compacts

Cette théorie est pour l'essentiel la création du mathématicien hongrois F. Riesz, aux alentours de 1910. Le théorème de Riesz est l'un des points-clés de cette théorie.

Lemme 5.2.1 *Soit E un espace de Banach ; pour tout sous-espace vectoriel L de dimension finie de E, il existe un projecteur continu P de E sur L, c'est à dire qu'il existe un sous-espace fermé F tel que $E = L \oplus F$.*

Preuve : Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de L et soit $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ la base duale pour le dual L^* ; par le théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger chaque forme linéaire e_j^* en une forme linéaire continue $x_j^* \in E^*$. Il suffit alors de poser

$$\forall x \in E,\ P(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x) e_j,$$

et de poser pour finir $F = \ker(P)$.

□

Lemme 5.2.2 *Soit $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact, et posons $T = Id_E - K$; si F est un sous-espace fermé de E tel que T soit injectif de F dans E, il existe une constante $c > 0$ telle que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in F$; il en résulte que l'image $T(F)$ est fermée.*

Preuve : En cas contraire, on pourrait trouver une suite $(x_n)_n$ de F de vecteurs de norme 1 telle que $\|T(x_n)\| \to 0$. Puisque K est compact, on peut trouver une sous- suite $(x_{n_k})_k$ telle que $K(x_{n_k})$ converge ; mais $T(x_{n_k}) = x_{n_k} - K(x_{n_k})$ tend vers 0, donc x_{n_k} converge vers un vecteur $x \in F$ (puisque F est fermé) tel que $\|x\| = 1$, et à la limite $T(x) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse T injectif sur F. Désignons par T_1 la restriction de T à F ; on a vu dans le chapitre précédent que la minoration $\|T_1(x)\| \geq c\|x\|$ (pour tout $x \in F$, et avec $c > 0$) implique que $\mathrm{Im}(T_1) = T(F)$ est fermée. En effet, si $(T(x_{n_k}))_k$ est de Cauchy, il en est de même pour $(x_{n_k})_k$.

□

Proposition 5.2.1 *Soit $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact, et posons $T = Id_E - K$; le noyau de T est de dimension finie et l'image $T(E)$ est fermée.*

On remarquera, en utilisant la formule du binôme et la propriété d'idéal de $K(E)$, que $T^n = (Id_E - K)^n$ est de la forme $Id_E - K_n$, avec K_n compact, donc les images de T^n sont fermées pour tout $n \geq 0$ (et leurs noyaux sont de dimension finie).

Preuve : Le noyau de T est le sous-espace propre de l'opérateur compact K pour la valeur propre 1, il est donc de dimension finie d'après le théorème de Riesz. Soit F un sous-espace fermé de E tel que $E = ker(T) \oplus F$; alors T est injectif sur F, donc $T(E) = T(F)$ est fermée.

□

Lemme 5.2.3 *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, avec F fermé et $F \subset G$, $F \neq G$, on peut trouver pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ un vecteur $y \in G$ tel que $\|y\| = 1$ et $d(y, F) > 1 - \varepsilon$.*

Puisque $F \neq G$, on peut trouver un premier vecteur $y_0 \in G \setminus F$. Puisque F est fermé et $y_0 \notin F$, on a $\delta = d(y_0, F) > 0$. On peut trouver $x_0 \in F$ tel que $\alpha = \|y_0 - x_0\| < \delta/(1-\varepsilon)$. Alors $y = \alpha^{-1}(y_0 - x_0) \in G$ convient.

□

Lemme 5.2.4 *Soit $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact, et posons $T = Id_E - K$; il n'existe pas de chaîne infinie $(F_n)_{n\leq 0}$ (resp : $(F_n)_{n\geq 0}$) de sous-espaces vectoriels fermés de E telle que*

$$F_n \subset F_{n+1}, F_n \neq F_{n+1} \text{ et } T(F_{n+1}) \subset F_n$$

pour tout $n \geq 0$ (resp : $n < 0$).

Preuve :

Traitons le cas $n \geq 0$, le cas $n < 0$ est identique. Supposons

au contraire que $F_n \neq F_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$; d'après le lemme précédent, on peut trouver pour tout $n \geq 0$ un vecteur $x_{n+1} \in F_{n+1}$ tel que $\|x_{n+1}\| = 1$ et $\mathrm{dist}(x_{n+1}, F_n) > 1 - \varepsilon$. Puisque $T(F_{n+1}) \subset F_n \subset F_{n+1}$ et $K = Id_E - T$, on a $K(F_{n+1}) \subset F_{n+1}$. Soient alors k, ℓ deux entiers tels que $0 < k < \ell$; le vecteur $T(x_\ell)$ est dans $F_{\ell-1}$ et $K(x_k) \in F_k \subset F_{\ell-1}$, donc $T(x_\ell) + K(x_k) \in F_{\ell-1}$, donc

$$\|x_\ell - (T(x_\ell) + K(x_k))\| \geq \mathrm{dist}(x_\ell, F_{\ell-1}) > 1 - \varepsilon.$$

Mais cette quantité est égale à $\|K(x_\ell) - K(x_k)\|$. L'image $K(\overline{B}_E)$ contiendrait donc une suite infinie de points dont les distances mutuelles seraient $\geq 1 - \varepsilon$, ce qui contredirait la compacité de K.

□

Corollaire 5.2.1 *Soit $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact, et posons $T = Id_E - K$; la suite croissante des noyaux $(\ker(T^n))_{n\geq 0}$ est stationnaire. La suite décroissante des images $(\mathrm{Im}(T^n))_{n\geq 0}$ est stationnaire.*

Preuve :

Posons $F_n = \ker(T^n)$. On a bien F_n fermé, $F_n \subset F_{n+1}$ et de plus $T(F_{n+1}) \subset F_n$ pour tout $n \geq 0$; si la suite n'était pas stationnaire, elle contredirait le lemme précédent. Pour le cas des images on posera $F_{-n} = \mathrm{Im}(T^n)$ pour $n \geq 0$; on a vu précédemment (cf. Proposition 5.2.1) que toutes ces images sont fermées.

□

Corollaire 5.2.2 *Soit $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact, et posons $T = Id_E - K$; si T est surjectif, alors $\ker(T) = 0$; si T est injectif, alors $\mathrm{Im}(T) = E$.*

Preuve :

Si l'opérateur T est surjectif et si $\ker(T) \neq \{0\}$, on montre par récurrence que $\ker(T^n) \neq \ker(T^{n+1})$ pour tout $n \geq 1$: si $x \in \ker(T^{n+1}) \setminus \ker(T^n)$, on a $T^{n+1}(x) = 0$ et $T^n(x) \neq 0$. Puisque T est surjectif, il existe y tel que $T(y) = x$. Il en résulte que $T^{n+2}(y) = T^{n+1}(x) = 0$ mais $T^{n+1}(y) = T^n(x) \neq 0$. Ceci est impossible quand $T = Id_E - K$, avec K compact, par le corollaire 5.2.1.

Si T est injectif et $T(E) \neq E$, on vérifie que $\mathrm{Im}(T^{n+1}) \neq \mathrm{Im}(T^n)$ pour tout $n \geq 0$, ce qui est à nouveau impossible quand $T = Id_E - K$, avec K compact, de nouveau par le corollaire 5.2.1.

Si F est un sous-espace vectoriel fermé de E, on appelle **codimension** de F la dimension du quotient E/F (finie ou $+\infty$). Si F est de codimension finie n, on peut trouver un sous-espace vectoriel G de dimension n tel que $E = F \oplus G$, et pour tout sous-espace G' tel que $\dim(G') > n$, on a $F \cap G' \neq \{0\}$.

Théorème 5.2.1 (Alternative de Fredholm) *Soient E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur borné de la forme $T = Id_E - K$, avec K compact;*

l'image de T est fermée et de codimension finie et l'on a

$$\operatorname{codim}\operatorname{Im}(T) = \dim\ker(T).$$

Pour un opérateur T à image fermée et à noyau de dimension finie, la différence $\dim\ker(T) - \operatorname{codim}\operatorname{Im}(T)$ *s'appelle l'indice de l'opérateur T et se note* $\operatorname{Ind}(T)$*. Le théorème dit que $Id_E - K$ est d'indice nul pour tout opérateur compact K.*

Preuve : D'après la proposition 5.2.1, $\ker(T)$ est de dimension finie et $\operatorname{Im}(T)$ fermée. On doit montrer de plus que $\dim\ker(T) = \operatorname{codim} T(E)$, c'est à dire que l'indice de T est nul. On va procéder par récurrence sur la dimension de $\ker(T)$. Si $\dim ker(T) = 0$, on sait que T est surjectif d'après le corollaire 5.2.2, donc l'indice est nul dans ce cas ; on suppose donc que n est un entier > 0 et que $\operatorname{Ind}(T) = 0$ pour tout opérateur $T' = Id_E - K'$ où K est compact et $\dim\ker(T') < n$. Soit $T = Id_E - K$ avec K compact et $\dim\ker(T) = n > 0$; d'après le corollaire 5.2.2, on a $\operatorname{Im}(T) \neq E$; soit donc $y_0 \notin \operatorname{Im}(T)$; on note que $\mathbb{C}y_0 \oplus T(E)$ est une somme directe. On va construire T' de la forme $Id_E - K'$ tel que $\operatorname{Ind}(T') = \operatorname{Ind}(T)$ et $\dim\ker(T') < \dim\ker(T)$; d'après l'hypothèse de récurrence, on aura $0 = \operatorname{Ind}(T') = \operatorname{Ind}(T)$, ce qui donnera le résultat. On écrit $E = \ker(T) \oplus E_1$ en utilisant le lemme 5.2.1 ; soit $\{x_1, \cdots, x_n\}$ une base de $\ker(T)$. On définit un opérateur $T' \in \mathcal{L}(E)$ en posant pour tout $x \in E$, représenté sous la forme $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + y$, avec $y \in E_1$,

$$T'(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + y) = \lambda_1 y_0 + T(y).$$

Si $T'(x) = 0$, il en résulte que $T(y) = 0_E$ et $\lambda_1 y_0 = 0_E$, donc $y \in \ker(T) \cap E_1$ entraîne $y = 0_E$; d'autre part $\lambda_1 y_0 = 0_E$ entraïne $\lambda_1 = 0$ puisque le vecteur y_0 est non nul. Il en résulte que $\ker(T') = Vect(x_2, \cdots, x_n)$ est de dimension $n - 1$. Par ailleurs, l'opérateur $R = T' - T$ est de rang 1 : en effet $(T' - T)(x) = \lambda_1 y_0$ pour tout x, donc l'image de R est contenue dans $\mathbb{C}y_0$; on peut écrire par conséquent $T' = Id_E - K'$ avec $K' = K - R$ compact, et on a alors $\operatorname{Ind}(T') = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence, ce qui montre déjà que $\operatorname{codim}\operatorname{Im}(T')$ est finie. Il est clair que $\mathrm{Im}(T') = \mathbb{C}y_0 \oplus T(E)$ a exactement une dimension de plus que $T(E)$, donc $\operatorname{codim} \mathrm{Im}(T) = \operatorname{codim} \mathrm{Im}(T') + 1$, et $\mathrm{Ind}(T) = \mathrm{Ind}(T') = 0$.

$\square$

Théorème 5.2.2 *Soient E un espace de Banach complexe et $K \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur compact ; le spectre de K est fini ou formé d'une suite tendant vers* 0. *Chaque valeur $\lambda \neq 0$ dans $\sigma(K)$ est une valeur propre de K, de multiplicité finie.*

Preuve : On va montrer que si $\lambda \neq 0$ est dans le spectre de K, alors λ est valeur propre de K et λ est isolé dans le spectre de K. En remplaçant K par $\lambda^{-1}K$ on se ramène à traiter $\lambda = 1$. Posons $T = Id_E - K$; si 1 n'est pas valeur propre de K, l'opérateur T est injectif, donc surjectif d'après le corollaire 5.2.2, donc $Id_E - K$ est inversible et 1 n'est pas dans le spectre de K. Supposons que $1 \in \sigma(K)$, donc 1 est valeur propre ; remarquons que $T^n = (Id_E - K)^n = IdE - K_n$ avec K_n compact (utiliser la formule du binôme), donc on sait que $\dim \ker(T^n) = \operatorname{codim} \mathrm{Im}(T^n)$ pour tout $n \geq 0$ (pour $n = 0$, c'est une évidence). On a vu qu'il existe un entier k tel $\ker(T^k) = \ker(T^{k+1})$, et on peut prendre pour k le plus petit entier vérifiant cette propriété ; on a $k \geq 1$ puisque 1 est valeur propre de K ; alors $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T^k) = \{0\}$, sinon on montre facilement que $\ker(T^k) \neq \ker(T^{k+1})$; on a *a fortiori* $\ker(T^k) \cap \mathrm{Im}(T^k) = \{0\}$ (car sinon $\ker T^k \neq \ker T^{2k}$), et d'après l'égalité dimension-codimension il en résulte que

$$E = \ker(T^k) \oplus \mathrm{Im}(T^k).$$

L'espace E se trouve décomposé en deux sous-espaces fermés T-invariants. La restriction T_2 de T à $\mathrm{Im}(T^k)$ est injective, donc c'est un isomorphisme de $\mathrm{Im}(T^k)$ sur $\mathrm{Im}(T^k)$ d'après le théorème 5.2.1. La restriction T_1 de T à $\ker(T^k)$ est un endomorphisme en dimension finie, dont la seule valeur propre est 0 ; pour tout $\lambda \neq 0$, $T_1 - \lambda$ est donc bijective de $\ker(T^k)$ sur $\ker(T^k)$, et pour λ assez petit, $T_2 - \lambda$ est encore un isomorphisme ; il en résulte que $T - \lambda$ est un isomorphisme pour $\lambda \neq 0$ et assez petit, ce qui signifie que 0 est isolé dans le spectre de T, ou encore que 1 est isolé dans le spectre de K. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un nombre fini de valeurs spectrales telles que $|\lambda| > \varepsilon$, ce qui permet de ranger les valeurs spectrales non nulles de K dans une suite qui tend vers 0, à moins que le spectre ne soit fini.

$\square$

Théorème 5.2.3 *Pour toute application linéaire* ***compacte normale*** *T d'un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$ dans lui-même, l'espace $\mathcal{H}$ est somme directe hilbertienne (orthogonale) de la famille des sous-espaces propres de T. Il en résulte que $\mathcal{H}$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

Preuve : Commençons par une remarque : si E est un Hilbert complexe non nul et si S est normal compact sur E, il existe $x \neq 0$ dans E et $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $Sx = \mu x$. En effet, on peut appliquer la formule du rayon spectral à l'algèbre unitaire $\mathcal{L}(E)$ (parce que $E \neq \{0\}$) : il existe une valeur spectrale μ de S telle que $|\mu| = \rho(S) = \|S\|$. Si $\mu = 0$, on a $S = 0$ et tout vecteur $x \in E$ non nul répond à la question. Si $\mu \neq 0$, on sait que μ est valeur propre d'après le théorème 5.2.2.

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une application linéaire compacte normale ; soit K son spectre ; c'est un ensemble fini ou dénombrable. Pour $\lambda \in K$ notons $E_\lambda = \ker(T - \lambda Id_{\mathcal{H}})$ l'espace propre de T associé. On va démontrer que les E_λ, $\lambda \in K$, sont deux à deux orthogonaux, et que le sous-espace engendré par les E_λ, $\lambda \in K$, est dense dans $\mathcal{H}$. On pourra alors considérer la somme hilbertienne F des sous-espaces deux à deux orthogonaux (E_λ), et on aura $F = \mathcal{H}$ d'après la densité de la somme des (E_λ).

On rappelle que $\ker S = \ker S^*$ quand S est normal ; comme $S = T - \lambda Id$ est normal et $S^* = T^* - \overline{\lambda} Id$, on voit que $E = \ker(T - \lambda Id) = \ker(T^* - \overline{\lambda} Id)$; il en résulte que chaque E_λ est stable par T et par T^*. Si $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$ alors

$$\langle T(x), y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$$

ce qui montre que $\langle x, y\rangle = 0$ si $\lambda \neq \mu$: les sous-espaces propres de T sont donc deux à deux orthogonaux.

Notons F le sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ engendré par les E_λ, pour λ valeur propre de T (ces espaces sont de dimension finie si $\lambda \neq 0$; le sous-espace $E_0 = \ker T$ peut être réduit à $\{0\}$, ou bien de dimension finie, ou infinie). Puisque chaque E_λ est stable par T et T^*, on a $T(F) \subset F$ et $T^*(F) \subset F$. Il s'ensuit que $T(F^\perp) \subset F^\perp$ et $T^*(F^\perp) \subset F^\perp$. Notons $T_1 \in \mathcal{L}(F^\perp)$ la restriction de T à l'orthogonal de F. Si l'on avait $E = F^\perp \neq \{0\}$, T_1 serait un opérateur normal compact sur E, qui aurait, d'après la remarque préliminaire, au moins un vecteur propre $x \in F^\perp$, $x \neq 0$ et $T_1(x) = T(x) = \mu x$ pour un certain $\mu \in \mathbb{C}$; mais alors on devrait avoir $x \in F$, puisque F contient tous les vecteurs propres de T ; on a donc $x \in F \cap F^\perp$, ce qui implique $x = 0_{\mathcal{H}}$, contradiction. On a donc bien $F = \mathcal{H}$. Pour obtenir une base orthonormée de $\mathcal{H}$ formée de vecteurs propres de T, on rassemble des bases orthonormées de chaque espace E_λ , $\lambda \neq 0$, qui sont des bases finies, et s'il y a lieu, une base orthonormée du noyau E_0.

$\square$

5.3 Exercices

5.3.1 Premiers exemples d'opérateurs compacts : shifts pondérés, opérateurs intégraux et opérateur de Volterra

Exercice 5.3.1 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de nombres complexes et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $T(e_n) = \lambda_n e_n$. Montrer que T est compact si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.*

Exercice 5.3.2 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Banach et T une application linéaire continue compacte de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Montrer que si l'image de T est fermée, alors elle est de dimension finie.*

Exercice 5.3.3 *Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ ou $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ muni de la norme du supremum : $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. On définit T sur E par*

$$T_K f(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy,$$

*où $K : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. L'opérateur T_K est appelé **opérateur intégral**.*

1. *Montrer que T_K est une application linéaire et continue de E dans E.*
2. *En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer que T_K est compacte.*

Exercice 5.3.4 *Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$, noté $\mathcal{C}([0,1])$, muni de la norme infini. On définit V sur $\mathcal{H}$ par*

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

*L'opérateur V est appelé **l'opérateur de Volterra***

1. *Montrer que V est une application linéaire et continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.*
2. *A l'aide du théorème d'Ascoli, montrer que V est un opérateur compact.*
3. *Montrer que V n'a pas de valeur propre.*
4. *Montrer que le rayon spectral de V est 0. On dit que V est **quasinilpotent**.*

5.3.2 Opérateurs de Hilbert–Schmidt

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Par définition on dit que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur de Hilbert–Schmidt si

$$\|T\|_2^2 := \sum_{n\geq 0} \|T(e_i)\|^2 < \infty.$$

Exercice 5.3.5 *On notera par $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert–Schmidt.*

1. *Montrer que $\sum_{n\geq 0} \|T(e_i)\|^2$ est indépendant du choix de la base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$.*
2. *Montrer que $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est un espace vectoriel normé complet muni pour la norme $\|\cdot\|_2$.*
3. *Montrer que $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est composé d'opérateurs compacts.*
4. *Montrer que $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*
5. *Soit $K \in L^2([0,1],[0,1])$ et soit T défini sur $L^2([0,1])$ par*

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

Montrer que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

5.3.3 Décomposition des opérateurs compacts

Exercice 5.3.6 *Soit Δ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et K une fonction complexe de carré intégrable sur $\Delta \times \Delta$ telle que $K(t,t') = \overline{K(t',t)}$ pour tout $t, t' \in \Delta$.*

1. *Soit v_K l'endomorphisme de $L^2(\Delta)$ défini par*

$$(v_K f)(t') = \int_\Delta K(t,t')f(t)dt \qquad (t' \in \Delta).$$

Montrer que le spectre de v_K se compose de 0 et d'une suite de valeurs propres réelles de multiplicités finies.

2. *Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ la suite des valeurs propres non nulles de v_K, chacune écrite un nombre de fois égal à sa multiplicité. Montrer que l'on a :*

$$\sum_n \lambda_n^2 = \int_\Delta \int_\Delta |K(t,t')|^2 dt dt' < \infty.$$

3. *Montrer que $L^2(\Delta)$ est la somme directe hilbertienne des sous-espaces propres de v_K correspondant aux différentes valeurs propres.*

4. *Choisissons un système orthormal $(\varphi_n)_n$ dans $L^2(\Delta)$ tel que $v_K\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ pour tout n. Pour tout $f \in L^2(\Delta)$, posons*

$$c_n = \int_\Delta f(t)\overline{\varphi_n(t)}dt.$$

Montrer que l'on a :

$$v_K f = \sum_n \lambda_n c_n \varphi_n,$$

la série convergeant normiquement dans $L^2(\Delta)$.

5. *Soit λ un nombre complexe non nul distinct de tous les λ_n. Soit $g \in L^2(\Delta)$ et posons $d_n = \int_\Delta g(t)\overline{\varphi_n(t)}dt$. Montrer qu'il existe $h \in L^2(\Delta)$ et une seule fonction $h \in L^2(\Delta)$ telle que*

$$\int_\Delta K(t,t')h(t)dt - \lambda h(t') = g(t')$$

presque partout dans Δ, et h est donné par la série

$$h = -\frac{1}{\lambda}g + \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n - \lambda)} d_n\varphi_n$$

convergeant normiquement dans $L^2(\Delta)$.

6. *Soit φ_{nm} la fonction définie sur $\Delta \times \Delta$ par*

$$\varphi_{nm}(t,t') = \overline{\varphi_n(t)}\varphi_m(t').$$

Montrer que

$$K = \sum_n \lambda_n \varphi_{nn},$$

la série convergeant normiquement dans $L^2(\Delta \times \Delta)$.

7. *On suppose maintenant que Δ est compact et K continue sur $\Delta \times \Delta$. Montrer que pour tout $f \in L^2(\Delta)$ la fonction $v_K f$ est continue. En déduire que les fonctions propres de v_K correspondant à une valeur propre non nulles sont continues.*

8. *Montrer que pour $f \in L^2(\Delta)$ la série*

$$v_K f = \sum_n \lambda_n c_n f_n$$

converge uniformément et absolument (en se plaçant dans les hypothèses de la question précédente.

9. *On reprend les notations et les hypothèses de 7. et 8. Montrer que pour toute fonction g continue sur Δ, l'unique $h \in L^2(\Delta)$ telle que, pour tout $\lambda \neq 0$,*

$$\int_\Delta K(t,t')h(t)dt - \lambda h(t') = g(t')$$

presque partout dans Δ, possède un représentant continu. Montrer que

$$h = -\frac{1}{\lambda} g + \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n - \lambda)} d_n \varphi_n$$

où cette série converge uniformément et absolument.