MASTER (MATHÉMATIQUES PURES)

COMPLÉMENTS EN ANALYSE

COURS et

EXERCICES

Isabelle Chalendar et Emmanuel Fricain

- 2010-2011 -

Table des matières

Chapitre 1

Compléments de topologie générale

1.1 Espaces topologiques

1.1.1 Définition

Nous rappelons briévement la définition d'un espace topologique et des principales notions qui s'y rapportent. Pour plus de détails, on pourra consulter [9, 8].

Définition 1.1.1 *Un espace topologique est un couple (X, τ), où X est un ensemble et τ est un ensemble de parties de X vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\emptyset, X \in \tau$

(ii) *Si $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ est une famille (quelconque) d'éléments de τ, alors*

$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i \in \tau.$$

(iii) *Si $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ sont des éléments de τ, alors*

$$\mathcal{O}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{O}_n \in \tau.$$

L'ensemble τ s'appelle une topologie sur X et les éléments de τ constituent ce qu'on appelle les ouverts de la topologie.

Un fermé d'une topologie est défini comme le complémentaire d'un ouvert.

Si (X, τ) est un espace topologique et si A est une partie de X, alors l'adhérence de A est le plus petit ensemble fermé de E qui contient A. On la note $\overline{A}$ ou $\mathrm{Clos}A$.

On dit qu'un point x de X est adhérent à A lorsque tout voisinage de x rencontre A.

Proposition 1.1.2 *L'adhérence de A est égale à l'ensemble des points qui lui sont adhérents.*

Preuve : Laissée en exercice.

□

Introduisons maintenant une notion qui permet de comparer deux topologies.

Définition 1.1.3 *Soient τ, τ' deux topologies définies sur un ensemble X. On dit que τ est plus faible (ou moins fine) que τ' si tout ouvert de τ est un ouvert de τ'.*

Remarque 1.1.4 *Soit (X, τ) un espace topologique et on note τ' la topologie discrète, c'est-à-dire la topologie telle que tout sous-ensemble de X est ouvert. Alors nécessairement τ est plus faible que τ'.*

Pour finir ce paragraphe, nous rappelons la notion de base de voisinage et base de la topologie.

Définition 1.1.5 *Etant donnée une topologie τ sur un ensemble X et $x \in X$.*

(a) *On appelle base de voisinage de x pour la topologie τ toute collection $\mathcal{B}$ d'ouverts pour τ contenant x et telle que chaque voisinage ouvert de x contient un élément de $\mathcal{B}$.*

(b) *Une collection $\mathcal{B}$ d'ouverts pour τ est appelée une base de la topologie si tout ouvert est une réunion d'ensembles de $\mathcal{B}$.*

Exemple 1.1.6 *Soient X un ensemble muni de la topologie discrète et $x \in X$. Alors une base de voisinage pour x est constitué du singleton $\{x\}$. De plus, une base de la topologie discrète est donnée par la famille $(\{x\})_{x \in X}$.*

Exemple 1.1.7 *Soient (E, d) un espace métrique et $x \in E$. Une base de voisinage pour x est constituée par la famille $(B(x, r))_{r>0}$ des boules ouvertes centrées en x. Une base de la topologie est alors donnée par l'ensemble des boules ouvertes. En particulier, sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des intervalles ouverts $]a, b[$, où a et b décrivent $\mathbb{R}$, est une base de la topologie de $\mathbb{R}$.*

1.1.2 Rappel sur la topologie la moins fine rendant continues une famille d'applications

Soient X un ensemble et $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, on se donne une application $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$. La question naturelle qui se pose est de munir X de la topologie τ la plus faible qui rende continue toutes les applications φ_i, $i \in I$.

Avant de répondre à cette question, nous donnons un résultat utile de théorie des ensembles.

Lemme 1.1.8 *Soient F, J_i et A_j ($i \in F$, $j \in J_i$) des ensembles quelconques. Alors*

$$\bigcap_{i\in F} \bigcup_{j\in J_i} A_j = \bigcup_{\psi\in\mathcal{F}} \bigcap_{i\in F} A_{\psi(i)},$$

où $\mathcal{F}$ est l'ensemble de toutes les applications $\psi : i \in F \longmapsto \psi(i) \in J_i$.

Cette formule prouve que si $\mathcal{A}$ est une famille d'ensembles, alors "toute intersection finie d'union d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$ est encore une union d'intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$".

Preuve : On a $x \in \bigcap_{i\in F} \bigcup_{j\in J_i} A_j$ si et seulement si, pour tout $i \in F$, il existe $j = \psi(i) \in J_i$ tel que $x \in A_j$. Ceci est équivalent à l'existence d'une application $\psi : i \in F \longmapsto \psi(i) \in J_i$ telle que $x \in \bigcap_{i\in F} A_{\psi(i)}$. Soit encore $x \in \bigcup_{\psi\in\mathcal{F}} \bigcap_{i\in F} A_{\psi(i)}$.
$\square$

Donnons maintenant le résultat principal de ce paragraphe.

Proposition 1.1.9 *Soit τ l'ensemble des parties de X de la forme*

$$\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in F_j}\varphi_i^{-1}(U_i),$$

où U_i désigne un ouvert quelconque de Y_i, F_j est un sous-ensemble fini quelconque de I et J est un ensemble quelconque d'indices. Alors τ définit une topologie sur X. De plus, τ est la topologie la plus faible qui rende continue toutes les applications φ_i, $i \in I$.

Preuve : Vérifions tout d'abord que τ définit une topologie sur X. On a

$$X = \varphi_i^{-1}(Y_i) \in \tau \quad \text{et} \quad \emptyset = \varphi_i^{-1}(\emptyset) \in \tau.$$

De plus, la famille est stable par union quelconque et la stabilité par intersection finie provient du lemme 1.1.8. Ainsi τ définit bien une topologie sur X.

Il est clair maintenant que chaque application φ_i, $i \in I$, est continue pour cette topologie τ. Il reste à montrer que c'est la plus faible qui rende continue les φ_i, $i \in I$. Pour cela, considérons une autre topologie τ' telle que toutes les applications φ soient continues pour τ'. Soient U_i un ouvert quelconque de Y_i, F_j un sous-ensemble fini quelconque de I et J un ensemble quelconque d'indices. Nécessairement on a $\varphi_i^{-1}(U_i) \in \tau'$ et comme τ' est une topologie, elle est stable par intersection finie et réunion quelconque et donc

$$\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in F_j}\varphi_i^{-1}(U_i) \in \tau'.$$

Ainsi tout ouvert pour τ est un ouvert pour τ', ce qui montre qui τ est une topologie plus faible que τ'.

□

Proposition 1.1.10 *Soient X un ensemble, $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$ une famille d'applications. Soit τ la topologie la plus faible rendant continue chaque φ_i, $i \in I$. Etant donné un point $x \in X$, une base* *de voisinage de x pour la topologie τ est obtenue en considérant les ensembles de la forme*

$$\bigcap_{i\in J}\varphi_i^{-1}(V_i),$$

où J est un sous-ensemble fini quelconque de I et V_i est un voisinage ouvert de $\varphi_i(x)$ dans Y_i.

Preuve : Tout d'abord, il est clair que les ensembles de la forme

$$\bigcap_{i\in J}\varphi_i^{-1}(V_i),$$

sont des ouverts pour la topologie τ qui contiennent x. Notons $\mathcal{B}$ la collection des ouverts de τ obtenus de cette façon. Soit maintenant V un voisinage ouvert de x pour la topologie τ. D'après la proposition 1.1.9, V est de la forme

$$V=\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in F_j}\varphi_i^{-1}(U_i),$$

où U_i désigne un ouvert quelconque de Y_i, F_j est un sous-ensemble fini quelconque de I et J est un ensemble quelconque d'indices. Comme $x\in V$, il existe $j\in J$ tel que

$$x\in\bigcap_{i\in F_j}\varphi_i^{-1}(U_i).$$

Donc $\varphi_i(x)\in U_i$, pour tout $i\in F_j$. Ainsi U_i est un voisinage ouvert de $\varphi_i(x)$ dans Y_i. D'où

$$\bigcap_{i\in F_j}\varphi_i^{-1}(U_i)\in\mathcal{B}\quad\text{et}\quad\bigcap_{i\in F_j}\varphi_i^{-1}(U_i)\subset V,$$

ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est une base de voisinage de x pour la topologie τ.

□

Nous verrons dans les sections 1.3 et 1.4 deux exemples fondamentaux de topologie rendant continues une famille d'applications. Dans ce qui suit, nous donnons deux autre exemples importants.

Exemple 1.1.11 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle semi-norme sur E une application $p:E\longrightarrow\mathbb{R}$ satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

(a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ *et*

(b) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$,

pour tous x, y *dans* X *et tous* $\alpha \in \mathbb{K}$.

Soit maintenant $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ *une famille de semi-normes sur un espace vectoriel* E. *On appelle* topologie engendrée par cette famille de semi-normes *la topologie la plus faible rendant continue les applications* p_α, $\alpha \in A$.

Exemple 1.1.12 *Soient* X *un ensemble,* Y *un espace topologique et* $\mathcal{F}(X, Y)$ *l'ensemble de toutes les applications de* X *dans* Y. *La* topologie de la convergence simple est la topologie la moins fine rendant continues toutes les projections $p_x : f \longmapsto f(x)$ de $\mathcal{F}(X, Y)$ dans Y, où x décrit X.

Le résultat suivant caractérise la convergence d'une suite relativement à la topologie τ.

Proposition 1.1.13 *Soient* $(x_n)_{n \geq 1}$ *une suite de* X *et* $x \in X$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La suite* $(x_n)_{n \geq 1}$ *converge vers* x *pour la topologie* τ.

(ii) *Pour chaque* $i \in I$, *la suite* $(\varphi_i(x_n))_{n \geq 1}$ *converge vers* $\varphi_i(x)$ *dans l'espace topologique* Y_i.

Preuve : L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) découle immédiatement de la continuité de l'application φ_i.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : soit U un voisinage ouvert de x. D'après la proposition 1.1.10, on peut toujours supposer que U est de la forme

$$U = \bigcap_{i \in J} \varphi_i^{-1}(V_i),$$

où J est un sous-ensemble fini de I et V_i est un voisinage ouvert de $\varphi_i(x)$ dans Y_i. En utilisant l'hypothèse (ii), pour chaque $i \in J$, il existe un entier N_i tel que $\varphi_i(x_n) \in V_i$, pour tout $n \geq N_i$. Soit $N = \max_{i \in J} N_i$. Alors $x_n \in U$, pour $n \geq N$, ce qui prouve la convergence de $(x_n)_{n \geq 1}$ vers x.

□

Dans le résultat suivant, on donne une caractérisation de la continuité d'une application par rapport à la topologie τ.

Proposition 1.1.14 *Soit Z un espace topologique et soit ψ une application de Z dans X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'application ψ est continue.*

(ii) *Pour chaque $i \in I$, l'application $\varphi_i \circ \psi : Z \longrightarrow Y_i$ est continue.*

Preuve : L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) découle des propriétés élémentaires sur les applications continues (la composée de deux applications continues est continue).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : soit U un ouvert de X. On doit montrer que $\psi^{-1}(U)$ est un ouvert de Z. D'après la proposition 1.1.9, l'ouvert U est de la forme

$$U = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in F_j} \varphi_i^{-1}(U_i),$$

où U_i désigne un ouvert quelconque de Y_i, F_j est un sous-ensemble fini quelconque de I et J est un ensemble quelconque d'indices. Par conséquent

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in F_j} \psi^{-1}(\varphi_i^{-1}(U_i)) = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in F_j} (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(U_i).$$

Comme $\varphi_i \circ \psi$ est continue, $(\varphi_i \circ \psi)^{-1}(U_i)$ est un ouvert de Z et par stabilité par union quelconque et intersection finie, $\psi^{-1}(U)$ est aussi un ouvert de Z.

□

1.2 Espaces topologiques compacts

1.2.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 1.2.1 *Soit X un espace topologique. On dit que X est **séparé** si pour tous $x, y \in E$, $x \neq y$, il existe $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y$ deux ouverts disjoints tels que $x \in \mathcal{O}_x$ et $y \in \mathcal{O}_y$.*

Remarque 1.2.2 *Il est clair que tout espace métrique est un espace topologique séparé.*

Définition 1.2.3 *Soit X un espace topologique séparé et A une partie de X. On dit que A est* ***compacte*** *si de chaque recouvrement de A par des ouverts de X, on peut extraire un recouvrement fini, soit en explicitant : quelque soit la famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ensembles ouverts de X telle que*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i,$$

il existe une partie finie J de I telle que

$$A \subset \bigcup_{i\in J} U_i.$$

Le résultat suivant donne une condition nécessaire et une condition suffisante simple pour la compacité.

Théorème 1.2.4 *Soit X un espace topologique séparé et A une partie de X.*

(a) *Si A est compacte alors A est fermée.*

(b) *Si X est compact et A est fermée, alors A est compacte.*

Preuve : Remarquons tout d'abord que dans un espace topologique séparé, l'intersection des voisinages fermés d'un point a se réduit à $\{a\}$. En effet, pour tout $x \in E \setminus \{a\}$, il existe un voisinage ouvert U de a et un voisinage ouvert V de x tels que $U \cap V = \emptyset$. Alors $E \setminus V$ est un ensemble fermé qui contient U. Donc $E \setminus V$ est un voisinage fermé de a et comme $x \notin E \setminus V$, on en déduit que

$$\bigcap_{V_a \in \mathcal{V}_{a,f}} V_a = \{a\},$$

où $\mathcal{V}_{a,f}$ désigne l'ensemble des voisinages fermés de a.

(a) : raisonnons par l'absurde et supposons que A soit compacte et non fermée. Alors il existe $a \in \overline{A} \setminus A$. D'après la remarque initiale, on en déduit que

$$\bigcap_{V_a \in \mathcal{V}_{a,f}} (V_a \cap A) = \emptyset.$$

Comme $V_a \cap A$ est fermé dans A, la compacité de A implique qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $V_1, V_2, \ldots, V_n$ des voisinages fermés de a tels que

$$\bigcap_{i=1}^{n} (V_i \cap A) = \emptyset.$$

Or $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ est un voisinage de a et comme $a \in \overline{A}$, on devrait avoir $V \cap A \neq \emptyset$. On obtient ainsi une contradiction.

(b) : soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X qui recouvre A. Alors

$$E = A \cup {}^c A \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i \cup {}^c A.$$

Comme A est fermé, ${}^c A$ est ouvert et donc la famille $\{\mathcal{O}_i, {}^c A : i \in I\}$ est un recouvrement d'ouverts de X. Par compacité, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ tels que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k} \cup {}^c A.$$

On en déduit alors que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k},$$

ce qui prouve la compacité de A.

$\square$

Continuons avec quelques résultats simples autour de la compacité dans un espace topologique abstrait.

Proposition 1.2.5 *Soient X, Y deux espaces topologiques séparés et φ une application continue de X dans Y. Si A est une partie compacte de X, alors $\varphi(A)$ est une partie compacte de Y.*

Preuve : Soit $(\mathcal{V}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de Y telle que

$$\varphi(A) \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{V}_i.$$

Alors $A \subset \bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}(\mathcal{V}_i)$ et comme φ est continue, $\varphi^{-1}(\mathcal{V}_i)$ est un ouvert de X. Par compacité de A, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ tels que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} \varphi^{-1}(\mathcal{V}_{i_j}).$$

D'où

$$\varphi(A) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{V}_{i_j},$$

et $\varphi(A)$ est compact.

□

Signalons aussi deux conséquences élémentaires mais utiles.

Corollaire 1.2.6 *Soient E, F deux espaces métriques, K une partie de E et $\Theta : E \longrightarrow F$ une isométrie, c'est-à-dire une application vérifiant :*

$$d_F(\Theta(x), \Theta(y)) = d_E(x, y), \qquad \forall (x, y) \in E \times E.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *K est compact.*

(ii) *$\Theta(K)$ est compact.*

Preuve : Remarquons que si on note $\Theta_1 := \Theta_{|K}$ la restriction de Θ à K, alors Θ_1 est un homéomorphisme de K sur $\Theta(K)$ (en fait Θ_1^{-1} est aussi une isométrie). Il suffit alors d'appliquer la proposition 1.2.5.

□

Corollaire 1.2.7 *Soient X, Y deux espaces topologiques séparés et $T : X \longrightarrow Y$ une bijection continue. Si X est compact alors T est un homéomorphisme, c'est-à-dire que T^{-1} est continue.*

Preuve : Il s'agit de montrer que, pour tout fermé F de X, $(T^{-1})^{-1}(F)$ est un fermé de Y. Comme F est une partie fermé du compact X, le théorème 1.2.4 implique que F est compacte. Or $(T^{-1})^{-1}(F) = T(F)$ et la proposition 1.2.5

entraîne alors que $T(F)$ est une partie compacte de Y. L'espace topologique Y étant séparé, en appliquant une nouvelle fois le théorème 1.2.4, on obtient que $T(F)$ est fermé. Ainsi T^{-1} est continue.

$\square$

1.2.2 Métrisabilité d'un espace topologique compact

Le lemme suivant est un lemme de rigidité.

Lemme 1.2.8 *Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur un ensemble X. Supposons que les deux topologies vérifient les conditions suivantes :*

(i) *τ_1 est plus faible que τ_2, c'est-à-dire que $\tau_1 \subset \tau_2$;*

(ii) *(X, τ_1) est séparé ;*

(iii) *(X, τ_2) est compact.*

Alors les deux topologies τ_1 et τ_2 coincident.

Preuve : Soit F un fermé de (X, τ_2). Comme (X, τ_2) est compact, le théorème 1.2.4 implique que F est en fait une partie compacte pour la topologie τ_2. Puisque τ_1 est plus faible que τ_2, F est aussi compact pour la topologie τ_1. Comme (X, τ_1) est séparé, une nouvelle application du théorème 1.2.4 entraîne que F est fermé dans (X, τ_1). Finalement on a prouvé que $\tau_2 \subset \tau_1$ et donc on obtient que les deux topologies coincident.

$\square$

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour qu'un espace topologique compact soit métrisable.

Théorème 1.2.9 *Soit (X, τ) un espace topologique compact et supposons que, pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction $f_n : (X, \tau) \longrightarrow \mathbb{K}$ continue et telle que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ sépare les points de X. Alors X est métrisable, c'est-à-dire qu'il existe une distance sur X qui induit la même topologie que τ.*

Preuve : D'après la proposition 1.2.5, f_n est bornée sur X et donc, sans perte de généralité, on peut supposer que $|f_n(x)| \leq 1$, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in X$. Posons alors

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)|, \qquad (x,y) \in X \times X.$$

Il est facile de vérifier que d est une métrique (on utilise ici le fait que la suite $(f_n)_n$ sépare les points). Comme chaque f_n est continue pour τ et que la série converge uniformément sur $X \times X$, on en déduit que d est une fonction continue sur $X \times X$, muni de la topologie produit induite par celle de τ. Ainsi les boules $B_r(p) := \{q \in X : d(p,q) < r\}$ sont ouvertes dans (X, τ). Si on note τ_d la topologie induite par la distance, on a donc démontré que $\tau_d \subset \tau$. Comme par hypothèse (X, τ) est compact et que (X, τ_d) est séparé, on obtient avec le lemme 1.2.8 que $\tau = \tau_d$.

$\square$

1.2.3 Précompacité et compacité séquentielle

Nous allons voir maintenant que dans un espace topologique compact, les suites jouissent d'une propriété remarquable souvent très utile. Avant rappelons la définition suivante.

Définition 1.2.10 *Soit X un espace topologique, $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de X. On dit que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ admet le point a de X pour* ***valeur d'adhérence*** *si, pour tout voisinage V de a, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$ est infini.*

Le résultat suivant fait le lien entre valeur d'adhérence d'une suite et adhérence d'un ensemble dénombrable.

Lemme 1.2.11 *Soit X un espace topologique séparé et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de X. Si $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, alors son adhérence $\overline{A}$ est la réunion de A et de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. En particulier, si $(x_n)_{n\geq 0}$ n'a pas de valeurs d'adhérence, alors A est fermé.*

Preuve : Soit a une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Par définition, pour tout voisinage V de a, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$ est infini. Donc en particulier, $V \cap XA \neq \emptyset$. Ceci montre donc que $a \in \overline{A}$.

Réciproquement, si $a \in \overline{A} \setminus A$ et V est un voisinage de a. Comme $a \in \overline{A}$, on a $V \cap A \neq \emptyset$. Nous devons montrer que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$ est infini. Supposons le contraire et soit $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\} = V \cap A$. Comme X est séparé, pour chaque $k = 1, \ldots, n$, il existe un voisinage ouvert V_k de a tel que $x_{i_k} \notin V_k$. Alors $U := V \cap V_1 \cap \cdots \cap V_n$ est un voisinage de a et $A \cap U = \emptyset$, ce qui est absurde car $a \in \overline{A}$.

Enfin, si $(x_n)_{n\geq 0}$ n'a pas de valeurs d'adhérence, alors ce qui précède montre que $A = \overline{A}$ et donc A est fermé !

□

Le résultat suivant très utile donne une caractérisation des valeurs d'adhérence d'une suite dans un espace métrique. Attention ce résultat n'est pas vrai en général dans un espace topologique quelconque (voir Exercice 1.11.6).

Lemme 1.2.12 *Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$.*

(ii) *il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ qui converge vers a.*

Preuve : (i) $\Longrightarrow$ (ii) : par définition d'une valeur d'adhérence, l'ensemble $B(a, 1)$ contient au moins un point de la suite disons x_{n_1}. Par récurrence, supposons qu'il existe $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ construits tels que $x_{n_k} \in B(a, 1/k)$. L'ensemble $B(a, 1/(k + 1))$ est un voisinage de a. Donc l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(a, 1/(k+1))\}$ est infini. Donc il existe $n_{k+1} > n_k$ tel que $x_{n_{k+1}} \in B(a, 1/(k+1))$. On construit ainsi une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que $d(x_{n_k}, a) < 1/k$. En faisant tendre $k \to +\infty$, on obtient alors que (x_{n_k}) converge vers a.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : soit V un voisinage de a. Alors par définition de la convergence d'une suite, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $x_{n_k} \in V$. Ainsi on obtient que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$ est infini, ce qui prouve que a est une valeur d'adhérence.

$\square$

Théorème 1.2.13 *Tout espace topologique compact X vérifie la propriété suivante, appelée axiome de Bolzano–Weierstrass : toute suite de points de X admet au moins une valeur d'adhérence.*

Preuve : Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de X sans valeur d'adhérence. L'espace topologique X étant séparé, le lemme 1.2.11 implique que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, les ensembles

$$A_p = \{x_n : n \geq p\}$$

sont fermés.

Fait : $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p = \emptyset$. En effet, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $a \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p$ et montrons alors que a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$. Soit V un voisinage de a. Comme pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a \in A_p$, on obtient que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq p$ tel que $a = x_n$. En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq p$ tel que $x_n \in V$. On en déduit donc que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$ est infini et donc a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$, ce qui est absurde. Ceci achève la preuve du fait.

Comme X est compact, il existe des entiers n et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{p_i} = \emptyset.$$

Or $\bigcap_{i=1}^{n} A_{p_i} = A_{p_{max}}$, où $p_{max} := \max(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ et donc $A_{p_{max}} = \emptyset$. On obtient donc une contradiction.

$\square$

Dans le cadre métrique, la réciproque de ce théorème est vraie. Avant de donner ce résultat, nous allons introduire deux définitions supplémentaires.

Définition 1.2.14 *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E.*

(a) *On dit que E est* ***séquentiellement compact*** *si chaque suite de E a une sous-suite convergente vers un point de E.*

(b) *On dit que A est* ***précompacte*** *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N et des points $x_1, \cdots, x_N \in E$ tels que A soit contenu dans la réunion des boules $B(x_i, \varepsilon), i = 1, ..., N$.*

Théorème 1.2.15 *Soit (E, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est compact.*

(ii) *E est séquentiellement compact.*

(iii) *E est complet et précompact.*

Preuve : Notre stratégie est de montrer que (i) entraîne (ii), que (ii) entraîne (iii), que (iii) entraîne (ii), et ensuite que (ii) et (iii) entraînent (i).

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : découle du théorème 1.2.13 et du lemme 1.2.12.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans E. Puisque E est séquentiellement compact, $(x_n)_{n\geq 0}$ possède une sous-suite convergente dans E. Il est alors facile de voir que $(x_n)_{n\geq 0}$ est aussi convergente vers la même limite. Donc E est complet.

Supposons maintenant que E ne soit pas précompact et cherchons une contradiction. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que, pour chaque $n \geq 1$ et pour chaque $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, nous avons

$$E \neq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon). \tag{1.1}$$

Prenons $x_1 \in E$ quelconque. D'après (1.1), nous savons que $E \setminus B(x_1, \varepsilon) \neq \emptyset$. Choisissons donc $x_2 \in E \setminus B(x_1, \varepsilon)$. Étant donné $x_1, x_2, \ldots, x_k$, prenons $x_{k+1} \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon)$ (notez que, d'après (1.1), $E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset$). Maintenant, nous avons une suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$ telle que

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon,$$

pour chaque $n \neq m$. Cette suite n'a donc aucun sous-suite convergente, ce qui contredit le fait que E soit séquentiellement compact.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) : soit $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$. Il s'agit de montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ possède une sous-suite convergente. En utilisant la précompacité de E, il existe un nombre fini de boules de rayon 1 qui recouvre E. Il existe donc une boule, disons B_1, qui contient x_n pour une infinité d'indices. Posons

$$\mathcal{N}_1 := \{n \geq 1 : x_n \in B_1\}.$$

De même, il existe un nombre fini de boules de rayon $1/2$ qui recouvre E. Il existe donc une boule, disons B_2, qui contient x_n pour une infinité d'indices $n \in \mathcal{N}_1$. Posons

$$\mathcal{N}_2 := \{n \in \mathcal{N}_1 : x_n \in B_2\}.$$

Supposons avoir trouvé $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots, \mathcal{N}_k$ et $B_1, B_2, \ldots, B_k$ tels que

$$\mathcal{N}_k \subset \cdots \subset \mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathbb{N},$$

$\mathcal{N}_k$ infini et B_j est une boule de rayon $1/j$ telle que $x_n \in B_j$ pour $n \in \mathcal{N}_j$. La précompacité de E implique une nouvelle fois qu'il existe un nombre fini de boules de rayon $1/(k+1)$ qui recouvre E. Donc il existe au moins une boule, disons B_{k+1}, qui contient x_n pour une infinité d'indices $n \in \mathcal{N}_k$. Posons alors

$$\mathcal{N}_{k+1} := \{n \in \mathcal{N}_k : x_n \in B_{k+1}\}.$$

Choisissons alors par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $n_k \in \mathcal{N}_k$. Cela est possible car chaque ensemble $\mathcal{N}_k$ est infini. Pour $j \geq i$, on a alors $n_j \in \mathcal{N}_j \subset \mathcal{N}_i$ et donc $x_{n_j} \in B_i$. D'où

$$d(x_{n_j}, x_{n_i}) \leq \frac{2}{i},$$

et donc la suite $(x_{n_i})_i$ est de Cauchy dans (E, d) complet. Donc elle converge vers un élément $x \in E$. Ceci achève de prouver que E est séquentiellement compact.

(iii) et (ii) $\Longrightarrow$ (i) : soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts de E.

Fait : il existe $\delta > 0$ tel que, pour chaque $x \in E$, il existe un $i \in I$ avec $B(x, \delta) \subset U_i$.

Pour prouver ce fait, raisonnons par l'absurde en supposant que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in E$ tel que pour chaque $i \in I$, on a $B(x, \delta) \not\subset U_i$. En particulier, on peut construire une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de points de E telle que $B(x_n, 1/n) \not\subset U_i$, pour tout $i \in I$. Comme E est séquentiellement compact, il existe une sous-suite, disons $(x_{n_p})_{p\geq 1}$, qui converge vers un point $x \in E$. Puisque $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E, il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$ et U_i étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_i$. Prenons alors p assez grand tel que $1/n_p < 1/(2r)$ et $d(x_{n_p}, x) < 1/(2r)$. Nous avons donc $B(x_{n_p}, 1/n_p) \subset U_i$, ce qui est une contradiction. Ainsi le fait est prouvé.

Nous avons aussi supposé que E est précompact. Il existe donc $y_1, y_2, \ldots, y_k$ des points de E tels que

$$E = \bigcup_{p=1}^{k} B(y_p, \delta).$$

Mais, en utilisant le fait prouvé précédemment, pour chaque y_p, il existe $i_p \in I$ tel que $B(y_p, \delta) \subset U_{i_p}$. Ainsi nous obtenons finalement que

$$E \subset \bigcup_{p=1}^{k} U_{i_p},$$

ce qui achève de prouver que E est compact.

□

1.2.4 Ensembles relativement compacts

Nous introduisons maintenant une propriété un peu plus faible que la compacité.

Définition 1.2.16 *Soit X un espace topologique séparé et A une partie de X. On dit que A est* ***relativement compact*** *dans X si son adhérence A dans X est compacte.*

Remarque 1.2.17 *Soient X un espace topologique séparé et A une partie compacte de X. Alors toute partie de A est relativement compacte. En effet, si $B \subset A$, alors $\overline{B} \subset A$ (car A est fermé d'après le théorème 1.2.4) et donc $\overline{B}$ est compacte toujours d'après ce même théorème.*

Théorème 1.2.18 *Soit (E, d) un espace métrique complet et A une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est relativement compact.*

(ii) *A est précompact.*

(iii) *Pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de points de A, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge (vers un élément $x \in \overline{A}$).*

Preuve : On vérifie facilement que A précompact si et seulement si $\overline{A}$ est précompact. De plus, remarquons que $\overline{A}$ est fermé dans (E, d) complet donc $\overline{A}$ est aussi complet (muni de la topologie induite par la distance d). Finalement, en utilisant le théorème 1.2.15, on obtient que

$$\overline{A} \text{ compact } \iff \overline{A} \text{ précompact } \iff A \text{ précompact},$$

ce qui prouve que (i) $\iff$ (ii).

(i) $\implies$ (iii) : soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de A. Comme $(\overline{A}, d)$ est un espace métrique compact, on peut appliquer le théorème 1.2.15 et en déduire que $\overline{A}$ est séquentiellement compact. Ainsi il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge vers un élément $x \in \overline{A}$.

(iii) $\implies$ (ii) : on raisonne par l'absurde en supposant que A ne soit pas précompact. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ et tous points $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$,

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Comme dans la preuve du théorème 1.2.15 ((ii) $\implies$ (iii)), on construit alors une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de points de A telle que $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$, $n \neq m$. Ainsi la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ ne peut pas avoir de sous-suite convergente, ce qui contredit la condition (iii).

□

Notons une conséquence facile mais utile qui donne une condition suffisante pour la relative compacité.

Corollaire 1.2.19 *Soit A une partie d'un espace métrique complet (E, d). Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K_ε de E telle que*

$$\forall x \in A,\, d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Alors A est relativement compacte.

Preuve : D'après le théorème 1.2.18, il suffit de montrer que A est précompacte. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe donc une partie compacte K_ε telle que $d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon/2$, pour tout $x \in A$. La compacité de K_ε implique alors qu'il existe $x_1, x_2, \ldots, x_N \in E$ tels que

$$K_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon/2).$$

On vérifie alors facilement que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon/2),$$

ce qui prouve que A est précompacte et donc relativement compacte.

□

Dans le cas d'une partie A d'un espace de Banach E, il est utile de retenir un critère qui utilise le caractère vectoriel de l'espace ambiant :

Proposition 1.2.20 *Soit A une partie d'un espace de Banach E. Alors A est relativement compacte si et seulement si A vérifie les deux conditions suivantes :*

(a) *l'ensemble A est borné ;*

(b) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel $L_\varepsilon \subset E$ de dimension finie tel que pour tout $x \in A$*

$$\operatorname{dist}(x, L_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Preuve : Si l'adhérence de A est compacte il est facile de vérifier que le critère est satisfait : tout d'abord, $\bar{A}$ est borné parce que compact (la fonction continue $x \to \|x\|$ atteint son maximum sur le compact $\overline{A}$) ; la deuxième condition est impliquée par la précompacité. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Posons $L_\varepsilon := \text{Vect}\ (x_i : 1 \leq i \leq n)$. On vérifie alors que pour tout $x \in A$, on a $d(x, L_\varepsilon) < \varepsilon$.

Réciproquement, supposons les deux conditions du critère vérifiées. Soit M une borne pour les normes des éléments de A ; soient $\varepsilon > 0$ et L_ε un sous-espace vectoriel de dimension finie qui approche A à moins de ε. Désignons par K_ε le sous-ensemble de E défini par

$$K_\varepsilon := \{x \in L_\varepsilon : \|x\| \leq M + \varepsilon\} = L_\varepsilon \bigcap \overline{B(0, M + \varepsilon)}.$$

On vérifie facilement que K_ε est un sous-ensemble fermé borné de L_ε qui est un espace vectoriel normé de dimension finie. Donc K_ε est un compact de L_ε et donc de E. De plus, si $x \in A$, il existe $y \in L_\varepsilon$ tel que $\|x - y\| < \varepsilon$; puisque $\|x\| \leq M$, on aura $\|y\| \leq M + \varepsilon$, d'où $y \in K_\varepsilon$. Ainsi on obtient que pour tout $x \in A$, $d(x, K_\varepsilon) < \varepsilon$. Le corollaire 1.2.19 permet alors d'en déduire que A est relativement compacte.

$\square$

Le résultat suivant montre la stabilité de la compacité et de la relative compacité par rapport à la somme.

Proposition 1.2.21 *Soient K_1 et K_2 deux compacts dans un espace de Banach E. Alors l'ensemble $K_1 + K_2$ est compact. De plus, si A_1 et A_2 sont relativement compacts dans l'espace dans E, alors l'ensemble $A_1 + A_2$ est aussi relativement compact dans E.*

Preuve : Il est facile de vérifier que $K_1 \times K_2$ est compact (pour la topologie produit induite par celle de $E \times E$). De plus, l'application $\varphi : (x, y) \longmapsto x + y$ est continue sur $E \times E$ à valeurs dans E. Donc $K_1 + K_2 = \varphi(K_1 \times K_2)$ est compact d'après la proposition 1.2.5.

La deuxième assertion résulte facilement de la première, car l'adhérence de la somme $A_1 + A_2$ est contenue dans $\overline{A_1} + \overline{A_2}$.

$\square$

1.3 La topologie faible $\sigma(E, E^*)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de Banach ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note E^* l'espace dual, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires et continues sur E.

Définition 1.3.1 *Etant donné E un espace de Banach, la topologie faible sur E est la topologie la plus faible sur E rendant continues toutes les applications $\varphi \in E^*$. On la note $\sigma(E, E^*)$.*

Proposition 1.3.2 *Soit E un espace de Banach. La topologie faible $\sigma(E, E^*)$ est séparée.*

Preuve : Soient $x_1, x_2 \in E$ avec $x_1 \neq x_2$. On cherche à construire deux ouverts $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ tels que $x_1 \in \mathcal{O}_1$, $x_2 \in \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. D'après un corollaire du théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E^*$ tels que $f(x_1) \neq f(x_2)$. On peut alors trouver $\varepsilon > 0$ tel que les boules $B_1 := B(f(x_1), \varepsilon)$ et $B_2 := B(f(x_2), \varepsilon)$ sont disjointes. On pose alors

$$\mathcal{O}_1 = \{x \in E : |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon\} = f^{-1}(B_1)$$

et

$$\mathcal{O}_2 = \{x \in E : |f(x) - f(x_2)| < \varepsilon\} = f^{-1}(B_2).$$

Il est clair alors que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont deux ouverts de E pour $\sigma(E, E^*)$ qui vérifient $x_1 \in \mathcal{O}_1$, $x_2 \in \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$.

□

Proposition 1.3.3 *Soient E un espace de Banach et $x_0 \in E$. Une base de voisinage de x_0 pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ est obtenue en considérant tous les ensembles de la forme*

$$V = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, \forall i \in I\},$$

où I est fini, $f_i \in E^*$ et $\varepsilon > 0$.

Preuve : Il est clair que

$$V = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(B(f_i(x_0), \varepsilon))$$

est un ouvert pour la topologie faible et qui contient x_0. Il reste à montrer que tout voisinage ouvert U de x_0 contient un sous-ensemble de cette forme. Par définition de la topologie faible et en utilisant la proposition 1.1.10, on sait qu'il existe un voisinage W de x_0, $W \subset U$, de la forme

$$W = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(\omega_i),$$

où I est fini, $f_i \in E^*$ et ω_i est un voisinage ouvert de $f_i(x_0)$ dans $\mathbb{K}$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f_i(x_0), \varepsilon) \subset \omega_i$, pour chaque $i \in I$ (attention ici on utilise le fait que I est fini). Si on définit

$$V = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, \forall i \in I\},$$

alors on a $x_0 \in V \subset W \subset U$, ce qui achève la preuve de la proposition.

□

Notation. Etant donnée une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de E, on désigne par $x_n \rightharpoonup x$ la convergence de x_n vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. Pour éviter les confusions, on précisera parfois "$x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E^*)$".

Proposition 1.3.4 *Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de E. On a*

(a) *$x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E^*)$ si et seulement si $f(x_n) \to f(x)$, pour toute $f \in E^*$.*

(b) *Si $x_n \to x$ fortement alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E^*)$.*

(c) *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E^*)$ alors $\|x_n\|$ est bornée et*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

(d) *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E^*)$ et $f_n \to f$ fortement dans E^*, alors $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Preuve : L'assertion (a) résulte de la proposition 1.1.13. L'assertion (b) découle de (a) et de la majoration

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \|f\|\|x_n - x\|,$$

valable pour toute $f \in E^*$. Prouvons maintenant (c). Pour $a \in E$, notons$\delta_a : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$ la forme linéaire définie par

$$\delta_a(f) = f(a), \qquad (f \in E^*).$$

On vérifie facilement que δ est continue et le théorème de Hahn–Banach implique que $\|\delta_a\| = \|a\|$. Par hypothèse, on sait que $\delta_{x_n}(f) \to \delta_x(f)$, $n \to +\infty$ et donc en particulier, on a

$$\sup_{n\geq 1} |\delta_{x_n}(f)| < +\infty,$$

pour toute $f \in E^*$. Le théorème de Banach–Steinhauss entraîne alors que

$$\sup_{n\geq 1} \|\delta_{x_n}\| < +\infty,$$

et donc
$$\sup_{n\geq 1} \|x_n\| < +\infty,$$
ce qui prouve la première partie de l'assertion. Remarquons maintenant que, si $f \in E^*$, on a
$$|f(x_n)| \leq \|f\|\|x_n\|,$$
et par passage à la limite inf, on obtient
$$|f(x)| \leq \|f\| \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$
Une nouvelle application du théorème de Banach–Steinhauss implique alors que
$$\|x\| = \sup_{f\in E^*, \|f\|\leq 1} |f(x)| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|,$$
ce qui achève la preuve de (c).

Pour finir prouvons (d). On a

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &= |(f_n - f)(x_n) + f(x_n - x)| \\ &\leq \|f_n - f\|\|x_n\| + |f(x_n - x)|. \end{aligned}$$

Il reste à appliquer (a) et (c) pour conclure.

$\square$

Remarque 1.3.5 *Les ouverts (resp. les fermés) de la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ sont aussi ouverts (resp. fermés) pour la topologie forte. Lorsque E est de dimension infinie, la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ est strictement plus faible que la topologie forte, c'est-à-dire qu'il existe des ouverts (resp. des fermés) pour la topologie forte qui ne sont pas ouverts (resp. fermés) pour la topologie faible. On pourra se reporter aux exercices 1.11.10 et 1.11.11 pour de tes exemples. En revanche (voir exercice 1.11.12), lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ et la topologie forte coincident. En particulier, une suite converge fortement si et seulement si elle converge faiblement.*

Remarque 1.3.6 *Lorsque E est de dimension infinie, la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ n'est pas métrisable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de métrique (et à fortiori pas de norme) définie sur E et qui induise sur E la topologie faible (voir exercice 1.11.13). Toutefois, on verra que si E^* est séparable, on peut construire une métrique définie sur $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ et qui induit sur B la même topologie que la topologie faible $\sigma(E, E^*)$: voir section 1.7.*

Remarque 1.3.7 *Lorsque E est de dimension infinie, il existe en général des suites qui convergent faiblement mais qui ne convergent pas fortement : par exemple, si E est un espace de Hilbert, toute suite orthonormale converge faiblement vers 0 mais ne converge pas fortement. Néanmoins il existe des espaces de Banach de dimension infinie où toute suite faiblement convergente est fortement convergente. Par exemple, ℓ^1 possède cette propriété pathologique (voir exercice 1.11.14). Bien entendu ceci ne contredit pas le fait qu'en dimension infinie, la topologie faible et la topologie forte sont toujours distinctes (voir remarque 1.3.5). Rappelons que deux espaces métriques, qui possèdent les mêmes suites convergentes, ont la même topologie. Toutefois, deux espaces topologiques qui possèdent les les mêmes suites convergentes n'ont pas nécessairement la même topologie (par exemple ℓ^1).*

Tout ensemble fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ est fermé pour la topologie forte. La réciproque est fausse en dimension infinie (voir remarque 1.3.5 et exercice 1.11.10). Toutefois le résultat suivant montre que la réciproque est vraie pour les ensembles convexes.

Théorème 1.3.8 *Soient E un espace vectoriel normé et C un sous-ensemble convexe de E. Alors C est faiblement fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ si et seulement s'il est fortement fermé.*

Preuve : On sait déjà que si C est faiblement fermé, alors il est fortement fermé. Réciproquement supposons que C est fortement fermé et montrons que

$E \setminus C$ est ouvert pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. Soit donc $x_0 \in E \setminus C$. D'après le théorème de Hahn–Banach (version géométrique), il existe un hyperplan fermé séparant au sens strict $\{x_0\}$ et C. Autrement dit, il existe $f_0 \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\Re f(x_0) < \alpha < \Re f(x),$$

pour tout $x \in C$. Posons alors

$$\Omega = \{x \in E : |f(x) - f(x_0)| < \alpha - \Re f(x_0)\}.$$

Il est clair que Ω est un voisinage ouvert de x_0 pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ et de plus, on vérifie facilement que $\Omega \cap C = \emptyset$. Par conséquent, $\Omega \subset E \setminus C$. Ainsi, $E \setminus C$ est un voisinage de chacun de ses points pour la topologie faible, ce qui signifie que $E \setminus C$ est ouvert pour $\sigma(E, E^*)$.

□

Le résultat suivant montre que pour une application linéaire entre deux espaces de Banach, la continuité faible et forte coincident.

Théorème 1.3.9 *Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire de E dans F. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est continue de E dans F.*

(ii) *T est continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ dans $(F, \sigma(F, F^*))$.*

Pour prouver ce résultat, nous utiliserons deux lemmes.

Lemme 1.3.10 *Soient E et F deux espaces de Banach et Ω_1 (resp. Ω_2) un ouvert de E (resp. de F) pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ (resp. $\sigma(F, F^*)$). Alors $\Omega_1 \times \Omega_2$ est un ouvert de $E \times F$ pour la topologie faible $\sigma(E \times F, (E \times F)^*)$.*

Preuve : Soient $(a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$. Il existe deux ensembles finis I et J, deux réels $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ et des formes linéaires continues $f_i \in E^*$, $i \in I$, et $g_j \in F^*$, $j \in J$ tels que

$$\bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(B(f_i(a), \varepsilon_1)) \subset \Omega_1 \quad \text{et} \quad \bigcap_{j \in I} g_j^{-1}(B(g_j(b), \varepsilon_2)) \subset \Omega_2. \tag{1.2}$$

Posons pour $i \in I$ et $j \in J$

$$\begin{array}{rccc} \Theta_i : & E \times F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \longmapsto & f_i(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \widetilde{\Theta_j} : & E \times F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \longmapsto & g_j(y). \end{array}$$

Il est clair que Θ_i et $\widetilde{\Theta_j}$ sont des éléments de $(E \times F)^*$. Ainsi l'ensemble U, défini par

$$U = \left(\bigcap_{i \in I} \Theta_i^{-1}(B(\Theta_i(a,b), \varepsilon_1) \right) \bigcap \left(\bigcap_{j \in J} \widetilde{\Theta}_j^{-1}(B(\widetilde{\Theta}_j(a,b), \varepsilon_2) \right)$$

est un voisinage ouvert de (a, b) pour la topologie faible $\sigma(E \times F, (E \times F)^*)$. De plus, en utilisant (1.2), on vérifie aisément que $U \subset \Omega_1 \times \Omega_2$. Ceci prouve que $\Omega_1 \times \Omega_2$ est un voisinage de chacun de ses points pour la topologie faible et donc $\Omega_1 \times \Omega_2$ est un ouvert pour $\sigma(E \times F, (E \times F)^*)$.

□

Lemme 1.3.11 *Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire de E dans F. On suppose que T est continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ dans $(F, \sigma(F, F^*))$. Alors le graphe de T,*

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) : x \in E,$$

est fermé pour la topologie faible $\sigma(E \times F, (E \times F)^*)$.

Preuve : Soit $(a, b) \in (E \times F) \setminus \mathcal{G}(T)$. Alors $Ta \neq b$. Comme la topologie faible est séparée (voir proposition 1.3.2), il existe U (resp. V) un voisinage ouvert de b (resp. de Ta) pour la topologie faible $\sigma(F, F^*)$ tels que $U \cap V = \emptyset$. En utilisant la continuité de T de $(E, \sigma(E, E^*))$ dans $(F, \sigma(F, F^*))$, on obtient que $T^{-1}(V)$ est un ouvert de E pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. Le lemme 1.3.10 implique alors que $T^{-1}(V) \times U$ est un voisinage ouvert de (a, b) pour la topologie faible $\sigma(E \times F, (E \times F)^*)$. Il reste à remarquer $T^{-1}(V) \times U \subset (E \times F) \setminus \mathcal{G}(T)$. En effet, supposons qu'il existe $(x, y) \in (T^{-1}(V) \times U) \cap \mathcal{G}(T)$. Alors $y = Tx \in U \cap V$, ce qui est absurde.

□

Preuve du théorème 1.3.9 : Pour prouver (i) $\Longrightarrow$ (ii), soit Ω un ouvert de F pour la topologie faible. On doit montrer que $T^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de E pour la topologie faible. On peut supposer que Ω est de la forme

$$\Omega = \bigcap_{i \in I} \varphi_i^{-1}(\mathcal{O}_i),$$

où I est fini, $\varphi_i \in F^*$ et $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de $\mathbb{K}$. Alors

$$T^{-1}(\Omega) = \bigcap_{i \in I} T^{-1}\varphi_i^{-1}(\mathcal{O}_i) = \bigcap_{i \in I} (\varphi_i \circ T)^{-1}(\mathcal{O}_i).$$

Or $\varphi_i \circ T : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est linéaire et continu donc $\varphi_i \circ T \in E^*$ et $T^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de E pour la topologie faible.

s Réciproquement, supposons que T soit continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ dans $(F, \sigma(F, F^*))$. En utilisant le lemme 1.3.11, on en déduit que $\mathcal{G}(T)$ est fermé pour la topologie faible $\sigma(E \times F, (E \times F)^*)$ et donc il est fermé pour la topologie forte. Le théorème du graphe fermé implique alors que T est continue de E dans F.

$\square$

1.4 La topologie faible* $\sigma(E^*, E)$

Soit E un espace de Banach et E^* son dual. Pour chaque $x \in E$, on considère l'application $\varphi_x : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi_x(f) = \langle f, x \rangle, \qquad f \in E^*.$$

Définition 1.4.1 *La topologie faible* * *sur* E^* *est la topologie la plus faible sur* E^* *qui rend continues toutes les applications* $(\varphi_x)_{x \in E}$. *On la note* $\sigma(E^*, E)$.

Remarque 1.4.2 *Etant donné* E *un espace de Banach, on dispose sur* E^* *de trois topologies :*

(a) *la topologie forte,*

(b) *la topologie faible* $\sigma(E^*, E^{**})$ *et*

(c) *la topologie faible** $\sigma(E^*, E)$.

Notons que chaque φ_x *est continue comme forme linéaire sur* E^* *(avec la topologie forte) et donc* $\varphi_x \in E^{**}$. *Ainsi* φ_x *est continue pour la topologie faible* $\sigma(E^*, E^{**})$ *et par définition de la topologie faible*, on obtient que la topologie faible* est plus faible que la topologie faible qui elle-même est plus faible que la topologie forte.*

On peut s'étonner de l'intérêt d'appauvrir ainsi les topologies. La raison est la suivante : plus une topologie est faible, moins elle possède d'ouverts et plus elle possède de compacts. Or la compacité est un outil essentiel dans de nombreuses questions, notamment d'existence. Ainsi, on verra dans le théorème de Banach–Alaoglu que la boule unité du dual d'un espace de Banach E est compacte pour la topologie faible*, alors qu'elle n'est compacte pour la topologie de la norme uniquement lorsque l'espace E est de dimension finie.

Proposition 1.4.3 *Soit* E *un espace de Banach. La topologie faible* est séparée.*

Preuve : Soient f_1 et f_2 dans E^* avec $f_1 \neq f_2$. Il existe donc $x \in E$ tel que $f_1(x) \neq f_2(x)$. On considère alors $\varepsilon > 0$ tel que les boules $B_1 := B(f_1(x), \varepsilon)$ et $B_2 := B(f_2(x), \varepsilon)$ sont disjointes. On pose alors

$$\mathcal{O}_1 = \{f \in E^* : |f_1(x) - f(x)| < \varepsilon\} = \varphi_x^{-1}(B_1)$$

et

$$\mathcal{O}_2 = \{f \in E^* : |f_2(x) - f(x)| < \varepsilon\} = \varphi_x^{-1}(B_2).$$

Il est clair alors que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont deux ouverts de E^* pour $\sigma(E^*, E)$ qui vérifient $f_1 \in \mathcal{O}_1$, $f_2 \in \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$.

□

On peut expliciter les bases de voisinage d'un point pour cette topologie.

Proposition 1.4.4 *Soit* E *un espace de Banach et* $f_0 \in E^*$. *Une base de voisinage de* f_0 *pour la topologie faible* est obtenue en considérant tous les ensembles* *de la forme*

$$V_{f_0} = \{\varphi \in E^* : |\varphi(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, \forall i \in I\},$$

où I est finie, $x_i \in E$ et $\varepsilon > 0$.

Preuve : Il est clair que

$$V_{f_0} = \bigcap_{i \in I} \varphi_{x_i}^{-1}(B(f_0(x_i), \varepsilon))$$

est un ouvert pour la topologie $\sigma(E^*, E)$ qui contient f_0. Réciproquement soit U un voisinage de f_0 pour $\sigma(E^*, E)$. Par définition de la topologie faible* et en utilisant la proposition 1.1.10, on sait qu'il existe un voisinage W de f_0, $W \subset U$, de la forme $W = \bigcap_{i \in I} \varphi_{x_i}^{-1}(\omega_i)$, I fini, ω_i voisinage ouvert dans $\mathbb{K}$ de $f_0(x_i)$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f_0(x_i), \varepsilon) \subset \omega_i$, pour chaque $i \in I$ (ici on utilise que I est fini !). Si on définit V par

$$V = \{\varphi \in E^* : |\varphi(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, \forall i \in I\},$$

on a alors $f_0 \in V \subset W \subset U$.

$\square$

Notation. Etant donnée une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de E^*, on désigne par $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ la convergence de f_n vers f pour la topologie faible $-*$ $\sigma(E^*, E)$. Pour éviter les confusions, on précisera parfois "$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E^*, E)$"

Proposition 1.4.5 *Soient $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de E^*. On a*

(a) *$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E^*, E)$ si et seulement si $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in E$.*

(b) *Si $f_n \to f$ fortement, alors $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E^*, E^{**})$. Si $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E^*, E^{**})$, alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E^*, E)$.*

(c) *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E^*, E)$, alors $\|f_n\|$ est bornée et*

$$\|f\| \leq \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|.$$

(d) *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E^*, E)$ et si $x_n \to x$ fortement dans E, alors $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Preuve : La preuve est similaire à la proposition 1.3.4 et est laissée en exercice.

□

Remarque 1.4.6 *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E^*, E)$ *(ou même si pour* $f_n \rightharpoonup f$ *pour* $\sigma(E^*, E^{**})$*), et si* $x_n \rightharpoonup x$ *pour* $\sigma(E, E^*)$ *alors on ne peut pas conclure que* $f_n(x_n) \to f(x)$*. Par exemple, considérons* $E = H$ *un espace de Hilbert,* $(e_n)_{n \geq 1}$ *une suite orthonormale de* H *et* $f_n \in E^*$ *définie par*

$$f_n(x) = \langle x, e_n \rangle, \qquad (x \in H).$$

Alors $e_n \rightharpoonup 0$ *pour* $\sigma(H, H^*)$ *et* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ *pour* $\sigma(H^*, H)$*. En revanche,*

$$f_n(e_n) = \langle e_n, e_n \rangle = \|e_n\|^2 = 1,$$

et donc $f_n(e_n)$ *ne tend pas vers* 0*.*

L'importance de la topologie faible* est sans aucun doute contenue dans le théorème de Banach-Alaoglu.

Théorème 1.4.7 (Banach-Alaoglu) *Soit* E *un espace de Banach,* E^* *son dual topologique et*

$$\overline{B}_{E^*} = \{\varphi \in E^* : \|\varphi\| \leq 1\}$$

la boule unité fermée de E^**. Alors* $\overline{B}_{E^*}$ *est compacte pour la topologie faible***.*

Preuve : Pour la preuve de ce résultat classique, on renvoie le lecteur à [2, Théorème III.15., page 42].

□

1.5 Espaces réflexifs

Soit E un espace de Banach, E^* son dual et E^{**} son bidual. On a une injection canonique $J : E \to E^{**}$ définie de la façon suivante : soit $x \in E$ fixé ; alors l'application $f \longmapsto \langle f, x\rangle$ de E^* dans $\mathbb{K}$ est une forme linéaire continue sur E^* et donc est un élément de E^{**} qu'on note Jx. On a donc

$$\langle Jx, f\rangle_{E^{**},E^*} = \langle f, x\rangle_{E^*,E}, \qquad \forall x \in E, \forall f \in E^*.$$

Il est clair que J est linéaire et que J est une isométrie, i.e. $\|Jx\|_{E^{**}} = \|x\|_E$, pour tout $x \in E$. En effet, en utilisant le théorème d'Hahn–Banach, on a

$$\|Jx\| = \sup_{f\in E^*, \|f\|\leq 1} |\langle Jx, f\rangle| = \sup_{f\in E^*, \|f\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|.$$

A l'aide de J, on peut toujours identifier E à un sous-espace fermé de E^{**}.

Définition 1.5.1 *Soit E un espace de Banach. On dit que E est réflexif si $J(E) = E^{**}$. Dans ce cas, J est un isomorphisme isométrique de E sur E^{**}. Lorsque E est réflexif, on identifiera souvent implicitement E et E^{**} (à l'aide de l'isomorphisme J).*

L'application J est un isomorphisme isométrique de E, muni de la topologie de la norme, sur $J(E)$, muni de la topologie de la norme. Au niveau des topologies faibles, on peut donner le résultat suivant.

Lemme 1.5.2 *Soit E un espace de Banach. L'injection canonique J est un isomorphisme de E, muni de la topologie faible $\sigma(E, E^*)$, sur $J(E)$, muni de la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$.

Preuve : Rappelons que la topologie $\sigma(E, E^*)$ est la topologie la plus faible sur E qui rend continues toutes les applications $x^* \in E^*$ et la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$ est la topologie la plus faible qui rend continues toutes les applications

$$\begin{array}{rccl} \Theta_{x^*} : & E^{**} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \varphi & \longmapsto & \langle \varphi, x^*\rangle, \end{array}$$

pour tout $x^* \in E^*$. De plus, si $x \in E$ et $x^* \in E^*$, alors on a

$$(\Theta_{x^*} \circ J)(x) = \langle J(x), x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle.$$

D'où

$$\Theta_{x^*} \circ J = x^*. \tag{1.3}$$

En utilisant la proposition 1.1.14, on voit que J est continue de E, muni de la topologie faible $\sigma(E, E^*)$, sur $J(E)$, muni de la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$ si et seulement si, pour tout $x^* \in E^*$, l'application $\Theta_{x^*} \circ J$ est continue de E, muni de la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ dans $\mathbb{K}$. Mais ceci est vrai d'après (1.3) et la définition de la topologie faible.

D'autre part, toujours en utilisant la proposition 1.1.14, on obtient que J^{-1} est continue de $J(E)$, muni de la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$ sur E, muni de la topologie faible $\sigma(E, E^*)$, si et seulement si, pour tout $x^* \in E^*$, l'application $x^* \circ J^{-1}$ est continue de $J(E)$, muni de la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$ sur $\mathbb{K}$. Ceci est aussi vraie d'après (1.3) et la définition de la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$.

□

L'importance fondamentale de la réflexivité provient d'un résultat de compacité obtenu par Kakutani. Avant d'énoncer et démontrer ce résultat, nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 1.5.3 (Helly) *Soient E un espace de Banach, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in E^*$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ fixés. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in \overline{B}_E$ tel que*

$$|\langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \alpha_i| < \varepsilon, \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

(ii) *Pour tous $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$, on a*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\|.$$

Preuve : Montrons d'abord que (i) implique (ii). Soient $\varepsilon > 0$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ et $x_\varepsilon \in \overline{B}_E$ vérifiant (i). On a alors

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i\right| &\leq \left|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x_\varepsilon)\right| + \varepsilon \sum_{i=1}^n |\beta_i| \\ &\leq \left\|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\right\| + \varepsilon \sum_{i=1}^n |\beta_i|, \end{aligned}$$

ce qui donne (ii) en faisant tendre ε vers 0.

Réciproquement montrons que (ii) implique (i). Considérons l'application $F : E \to \mathbb{K}^n$ définie par

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)), \qquad (x \in E).$$

La condition (i) signifie que $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \overline{F(\overline{B}_E)}$. Raisonnons par l'absurde, en supposant au contraire que $\alpha \notin \overline{F(\overline{B}_E)}$. Comme $\overline{F(\overline{B}_E)}$ est un convexe fermé dans $\mathbb{K}^n$, en utilisant le théorème de Hahn–Banach (version géométrique), il existe une forme linéaire φ sur $\mathbb{K}^n$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\Re\varphi(z) < \gamma < \Re\varphi(\alpha),$$

pour tout $z \in \overline{F(\overline{B}_E)}$. Autrement dit, il existe $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\Re\left(\sum_{k=1}^n \beta_k f_k(x)\right) < \gamma < \Re\left(\sum_{k=1}^n \beta_k \alpha_k\right), \tag{1.4}$$

pour tout $x \in \overline{B}_E$. Fixons maintenant $x \in \overline{B}_E$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^n \beta_k f_k(x) = \left|\sum_{k=1}^n \beta_k f_k(x)\right| e^{i\theta}.$$

En appliquant l'inégalité (1.4) à $y = xe^{-i\theta}$, on obtient

$$\Re\left(e^{-i\theta}\sum_{k=1}^n \beta_k f_k(x)\right) < \gamma < \Re\left(\sum_{k=1}^n \beta_k \alpha_k\right),$$

soit

$$\left|\sum_{k=1}^n \beta_k f_k(x)\right| < \gamma < Re\left(\sum_{k=1}^n \beta_k \alpha_k\right) \leq \left|\sum_{k=1}^n \beta_k \alpha_k\right|.$$

Ceci implique immédiatement que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k \right\| < \left| \sum_{k=1}^{n} \beta_k \alpha_k \right|,$$

ce qui contredit la condition (ii).

□

Lemme 1.5.4 (Goldstine) *Soient E un espace de Banach, $\overline{B}_E$ (resp. $\overline{B}_{E^{**}}$) la boule unité fermée de E (resp. de E^{**}) et J l'injection canonique de E dans E^{**}. Alors $J(\overline{B}_E)$ est dense dans $\overline{B}_{E^{**}}$ pour la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$.*

Preuve : Soient $\eta \in \overline{B}_{E^{**}}$ et V un voisinage de η pour la la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$. Il s'agit de montrer que $V \cap J(\overline{B}_E) \neq \emptyset$. En utilisant la proposition 1.4.4, on peut supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1, f_2, \ldots, f_n \in E^*$ tels que

$$V = \{\zeta \in E^{**} : |(\zeta - \eta)(f_i)| < \varepsilon, \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Posons $\alpha_i = \eta(f_i)$, $1 \leq i \leq n$ et soit $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$. En utilisant le fait que $\eta \in \overline{B}_{E^{**}}$, on a

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i \right| = \left| \eta \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right) \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\|.$$

Le lemme 1.5.3 implique alors qu'il existe $x_\varepsilon \in \overline{B}_E$ tel que $|f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon$, pour $i = 1, \ldots, n$, ce qui signifie exactement que $J(x_\varepsilon) \in V$. Donc on a bien $V \cap J(\overline{B}_E) \neq \emptyset$.

□

Théorème 1.5.5 (Kakutani) *Soit E un espace de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'espace E est réflexif.*

(ii) *$\overline{B}_E$, la boule unité fermée de E, est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.*

Preuve : Montrons d'abord que (i) implique (ii). Autrement dit, supposons que E est réflexif. On a alors $J(\overline{B}_E) = \overline{B}_{E^{**}}$ et il résulte du théorème de Banach–Alaoglu que $\overline{B}_{E^{**}}$ est compacte pour la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$. Mais d'après le lemme 1.5.2, J^{-1} est continue de $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ vers $(E, \sigma(E, E^*))$ et on obtient ainsi que $\overline{B}_E = J^{-1}(\overline{B}_{E^{**}})$ est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.

Réciproquement, supposons que $\overline{B}_E$ est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. Comme J est continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ dans $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ (voir lemme 1.5.2), on en déduit que $J(\overline{B}_E)$ est compacte pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$. Mais comme $J(\overline{B}_E)$ est dense dans $\overline{B}_{E^{**}}$ (lemme de Goldstine) pour la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$, on doit avoir $J(\overline{B}_E) = \overline{B}_{E^{**}}$ et donc $J(E) = E^{**}$.

□

Nous allons maintenant donner deux conséquences utiles du théorème de Kakutani.

Corollaire 1.5.6 *Si E est un espace de Banach réflexif et M un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors M est réflexif.*

Preuve : Commençons par remarquer que, d'après le théorème de Hahn–Banach, toute forme linéaire et continue sur F est la restriction à F d'une forme linéaire et continue sur E. Il en résulte que la topologie $\sigma(E, E^*)$ induit sur F la topologie $\sigma(F, F^*)$.

Maintenant, en utilisant le théorème de Kakutani, on obtient que $\overline{B}_E$ est compact pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. Comme M est fermé, le théorème 1.3.8 implique que M est faiblement fermé pour $\sigma(E, E^*)$. On en déduit donc que l'ensemble $\overline{B}_M = \overline{B}_E \cap M$ est fermé pour $\sigma(E, E^*)$ et contenu dans le compact (pour la topologie faible) $\overline{B}_E$. Le théorème 1.2.4 implique alors que $\overline{B}_M$ est compact pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ donc pour la topologie faible $\sigma(M, M^*)$. Pour conclure, on applique une deuxième fois le théorème de Kakutani pour en déduire que M est réflexif.

□

Corollaire 1.5.7 *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si E^* est réflexif.*

Preuve : Supposons tout d'abord que E est réflexif. Il résulte du théorème de Banach–Alaoglu que $\overline{B}_{E^*}$ est compacte pour la topologie faible* $\sigma(E^*, E)$. Mais comme E est réflexif, la topologie faible $\sigma(E^*, E^{**})$ et faible * $\sigma(E^*, E)$ coincident et donc on obtient que $\overline{B}_{E^*}$ est compacte pour $\sigma(E^*, E^{**})$. Il résulte alors du théorème de Kakutani que E^* est réflexif.

Réciproquement, supposons que E^* est réflexif. D'après ce qui précède, l'espace E^{**} est alors réflexif. Comme $J(E)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E^{**}, le corollaire 1.5.6 implique que $J(E)$ est réflexif. Comme $J^{-1} : J(E) \to E$ est un isomorphisme isométrique entre espace de Banach, on en déduit aisément (voir exercice 1.11.21) que E est réflexif.

□

1.6 Espaces séparables

Définition 1.6.1 *Soit E un espace topologique. On dit que E est **séparable** s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense dans E.*

Commençons par deux lemmes utiles concernant cette notion de séparabilité.

Lemme 1.6.2 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs de E et notons par F le sous-espace vectoriel engendré par $(x_n)_{n\geq 1}$. Supposons que F soit dense dans E. Alors E est séparable.*

Preuve : On désigne par L_0 l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par la suite $(x_n)_{n\geq 1}$. On montre alors que L_0 est dénombrable et que L_0 est un sous-ensemble dense de F. Donc L_0 est dense dans E, ce qui prouve que E est séparable.

□

Lemme 1.6.3 *Soit E un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ telle que*

(i) *$\mathcal{O}_i \neq \emptyset$, $i \in I$,*

(ii) *$\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset$ si $i \neq j$,*

(iii) *I n'est pas dénombrable.*

Alors E n'est pas séparable.

Preuve : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans E. Pour chaque $i \in I$, il existe $n(i) \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n(i)} \in \mathcal{O}_i$. L'application $i \longmapsto n(i)$ est injective : en effet, si $n(i) = n(j)$, alors $u_{n(i)} = u_{n(j)} \in \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ et donc $i = j$. Par suite I est dénombrable, ce qui est contraire à l'hypothèse (iii).

□

Théorème 1.6.4 *Soit E un espace de Banach tel que E^* est séparable. Alors E est séparable.*

Preuve : Soit $(y_n^*)_{n\geq 1}$ une suite dénombrable dense dans E^*. Pour chaque $n \geq 1$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| = 1$ et

$$|\langle y_n^*, x_n\rangle| \geq \frac{1}{2}\|y_n^*\|.$$

Soit L le $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par la suite $(x_n)_{n\geq 1}$. Montrons que L est dense dans E. Soit $y^* \in E^*$ tel que $y^*_{|L} = 0$. Montrons que $y^* = 0$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $\|y^* - y_n^*\| < \varepsilon$. D'où

$$\frac{1}{2}\|y_n^*\| \leq |\langle y_n^*, x_n\rangle| = |\langle y_n^* - y^*, x_n\rangle| \leq \|y_n^* - y^*\| < \varepsilon.$$

Ainsi

$$\|y^*\| \leq \|y^* - y_n^*\| + \|y_n^*\| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $y^* = 0$. Un corollaire du théorème d'Hahn-Banach implique alors que L est dense dans E. Le lemme 1.6.2 permet de conclure que E est séparable.

□

Remarque 1.6.5 *En général, la séparabilité de E n'entraine pas la séparabilité de E^*. Ainsi $L^1(\Omega)$ est séparable tandis que son dual $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

Cependant dans le cas où E est réflexif, la séparabilité de E entraine celle de E^* comme le montre le résultat suivant.

Corollaire 1.6.6 *Soit E un espace de Banach. L'espace E est réflexif et séparable si et seulement si l'espace E^* est réflexif et séparable.*

Preuve : En utilisant le théorème 1.6.4 et le corollaire 1.5.7, on obtient que si E^* est réflexif et séparable, alors E est réflexif et séparable.

Réciproquement, supposons que E soit réflexif et séparable. Alors $E^{**} = J(E)$ est aussi réflexif et séparable et donc E^* est réflexif et séparable.

□

Dans la section suivante, nous allons voir que les propriétés de séparabilité sont étroitement liées à la métrisabilité des topologies faibles.

1.7 Métrisabilité des topologies faibles

Dans le cas où l'espace est séparable, on peut améliorer la conclusion du théorème de Banach–Alaoglu.

Théorème 1.7.1 *Soit E un espace de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'espace E est séparable.*

(ii) *$\overline{B}_{E^*}$ est compacte et métrisable pour la topologie faible* $\sigma(E^*, E)$.*

Preuve : (i) $\Longrightarrow$ (ii) : le théorème 1.4.7 de Banach–Alaoglu implique que $\overline{B}_{E^*}$ est compacte pour la topologie faible*. Comme E est séparable, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dense dans E. Posons $f_n(\Lambda) = \Lambda(x_n)$, pour $\Lambda \in E^*$. Par définition, f_n est continue pour la topologie faible*. De plus, si $\Lambda, \Lambda' \in E^*$ et si $f_n(\Lambda) = f_n(\Lambda')$, pour tout $n \geq 1$, alors on a $\Lambda(x_n) = \Lambda'(x_n)$. Par densité, on a $\Lambda = \Lambda'$ et donc la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ sépare les points de E^*. Le théorème 1.2.9 implique alors que $\overline{B}_{E^*}$ est métrisable pour la topologie faible*.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : on suppose que $\overline{B}_{E^*}$ est métrisable pour la topologie faible* $\sigma(E^*, E)$ et montrons que E est séparable. Soit

$$U_n = \{f \in E^* : d(0, f) < 1/n\},$$

et soit V_n un voisinage de 0 pour $\sigma(E^*, E)$ tel que $V_n \subset U_n$. On peut supposer que V_n est de la forme

$$V_n = \{f \in E^* : |\langle f, x\rangle| < \varepsilon_n, \forall x \in \Phi_n\},$$

où $\Phi_n \subset E$ est un sous-ensemble fini. Notons que $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ est dénombrable. D'autre part,

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n = \{0\},$$

et donc si $\langle f, x\rangle = 0$, $\forall x \in D$, alors $f = 0$. Il en résulte que l'espace vectoriel engendré par D est dense dans E. On conclut alors en utilisant le lemme 1.6.2.

□

En combinant le théorème 1.7.1 et le théorème 1.2.15, on obtient aisément le résultat utile suivant.

Corollaire 1.7.2 *Soit E un espace de Banach séparable et $(y_n^*)_n$ une suite bornée dans E^*. Alors il existe une sous-suite $(y_{n_k})_k$ qui converge pour la topologie faible*.*

On peut obtenir un résultat similaire pour la toplogie faible.

Théorème 1.7.3 *Soit E un espace de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'espace E^* est séparable.*

(ii) *$\overline{B}_E$ est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.*

Preuve : (i) $\Longrightarrow$ (ii) : d'après le théorème 1.7.1, la boule unité $\overline{B}_{E^{**}}$ est métrisable pour la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$. Or $J(\overline{B}_E) \subset \overline{B}_{E^{**}}$ et donc $J(\overline{B}_E)$ est aussi métrisable pour la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$. Rappelons alors (voir

Lemme 1.5.2) que J est un isomorphisme de $(E, \sigma(E, E^*))$ sur $(J(E), \sigma(E^{**}, E^*))$. On en déduit alors facilement que $\overline{B}_E$ est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : supposons que la boule unité $\overline{B}_E$ est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ et soit $(V_n)_n$ un système fondamental de voisinages de l'origine dans $\overline{B}_E$ pour cette topologie induite (un tel système de voisinages dénombrable existe car la topologie est métrisable). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une partie finie A_n de E^* telle que $\overline{B}_E \cap W_n \subset V_n$, où

$$W_n = \{x \in E : \sup_{x^* \in A_n} |x^*(x)| < 1\}.$$

L'ensemble $A = \bigcap_n A_n$ est dénombrable. D'après le lemme 1.6.2, il suffit de démontrer que le sous-espace vectoriel F engendré par A est dense dans E^*. Raisonnons par l'absurde et supposons que F ne soit pas dense dans E^*. Alors il existe une forme linéaire continue $x_0^{**} \in E^{**}$, nulle sur F et non identiquement nulle. On peut bien sûr supposer que $x_0^{**} \in \overline{B}_{E^{**}}$. Cette forme n'étant pas identiquement nulle, il existe $x_0^* \in E^*$ telle que $x_0^{**}(x_0^*) = 1$. Considérons

$$V = \{x \in \overline{B}_E : |x_0^*(x)| < 1/2\}.$$

Il est clair que V est un voisinage de l'origine pour $\sigma(E, E^*)$ dans $\overline{B}_E$. Donc il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $V_n \subset V$. Considérons maintenant

$$\Omega = \left\{ y^{**} \in \overline{B}_{E^{**}} : |y^{**}(x_0^*) - x_0^{**}(x_0^*)| < 1/2 \,\&\, \sup_{x^* \in A_n} |y^{**}(x^*) - x_0^{**}(x^*)| < 1 \right\}.$$

Il est clair que Ω est un voisinage ouvert de x_0^{**} pour la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$. Comme $J(\overline{B}_E)$ est dense dans $\overline{B}_{E^{**}}$ pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$ (voir lemme de Goldstine), il existe $x_0 \in \overline{B}_E$ tel que $J(x_0) \in \Omega$. Ainsi

$$|x_0^*(x_0) - x_0^{**}(x_0^*)| < 1/2, \tag{1.5}$$

et

$$\sup_{x^* \in A_n} |x^*(x_0) - x_0^{**}(x^*)| < 1. \tag{1.6}$$

La forme x_0^{**} étant nulle sur A_n, l'inégalité (1.6) implique

$$\sup_{x^* \in A_n} |x^*(x_0)| < 1,$$

c'est à dire que $x_0 \in W_n \cap \overline{B}_E \subset V_n$. D'autre part, comme $x_0^{**}(x_0^*) = 1$, l'inégalité (1.5) donne $|x_0^*(x_0)| \geq 1/2$, i.e. $x_0 \notin V$. Mais comme $V_n \subset V$, ceci est absurde et le théorème est démontré.

□

Théorème 1.7.4 *Soit E un espace de Banach réflexif et séparable. Alors $\overline{B}_E$ est compacte et métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.*

Preuve : Comme E est réflexif et séparable, le corollaire 1.6.6 implique que E^* est séparable et donc d'après le théorème 1.7.3, on obtient que $\overline{B}_E$ est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. Le théorème de Kakutani permet finalement de conclure que $\overline{B}_E$ est compacte et métrisable pour la topologie $\sigma(E, E^*)$.

□

Corollaire 1.7.5 *Soit E un espace de Banach réflexif et $(x_n)_n$ une suite bornée de E. Alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge faiblement.*

Preuve : Soit M_0 le sous-espace vectoriel engendré par les x_n et notons $M := \overline{M_0}$. Le corollaire 1.5.6 implique que M est réflexif et le lemme 1.6.2 implique lui que M est séparable. D'après le théorème 1.7.4, on peut en déduire que $\overline{B}_M$ est compact et métrisable pour la topologie faible $\sigma(M, M^*)$. Comme $(x_n)_n$ est une suite bornée dans M, quitte à la normaliser, on peut supposer que $x_n \in B_M$. En utilisant le théorème 1.2.15, on en déduit qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge faiblement pour la topologie $\sigma(M, M^*)$ et donc elle converge aussi pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.

□

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Corollaire 1.7.6 *Soit H un espace de Hilbert et $(x_n)_n$ une suite bornée de H. Alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge faiblement.*

1.8 Espaces uniformément convexes

Définition 1.8.1 *On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\big(x, y \in \overline{B}_E \text{ et } \|x - y\| > \varepsilon\big) \Longrightarrow \left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta\right).$$

On notera que cette définition fait intervenir une propriété géométrique de la boule unité (qui doit être bien "ronde") et qu'elle n'est pas stable par passage à une norme équivalente.

Exemple 1.8.2 *On prend $E = \mathbb{R}^2$. La norme $\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2}$ est uniformément convexe tandis que la norme $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ n'est pas uniformément convexe. On peut s'en convaincre en "regardant" les images des boules unités.*

Exemple 1.8.3 *On peut montrer facilement que les espaces de Hilbert sont uniformément convexes. On verra par la suite (voir section 1.9) que les espaces $L^p(\Omega)$ sont uniformément convexes pour $1 < p < \infty$. Par contre $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ et $C(K)$ (K compact) ne sont pas uniformément convexes.*

Le théorème suivant donne un outil commode pour prouver qu'un espace est réflexif. De plus, il est surprenant qu'une propriété de nature géométrique (uniforme convexité) entraîne une propriété de nature topologique (réflexivité).

Théorème 1.8.4 (Milman–Pettis) *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Preuve : Soit $\zeta \in E^{**}$ avec $\|\zeta\| = 1$. Montrons que $\zeta \in J(\overline{B}_E)$. Comme $J(\overline{B}_E)$ est fermé dans E^{**} pour la topologie forte, il suffit de prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \overline{B}_E$ tel que $\|\zeta - J(x)\| < \varepsilon$. Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé et soit $\delta > 0$

donné par la définition de l'uniforme convexité. Comme $\|\zeta\| = 1$, il existe $f \in E^*$, $\|f\| = 1$ tel que

$$\langle \zeta, f \rangle > 1 - \delta/2. \tag{1.7}$$

On pose

$$V = \{\eta \in E^{**} : |\langle \eta - \zeta, f \rangle| < \delta/2\}.$$

Il est clair que V est un voisinage de ζ pour la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$. D'après le lemme de Goldstine, on sait que $V \cap J(\overline{B}_E) \neq \emptyset$. Fixons donc $x \in \overline{B}_E$ tel que $J(x) \in V$. Montrons que $\zeta \in J(x) + \varepsilon \overline{B}_{E^{**}}$, ce qui achèvera la démonstration. Raisonnons par l'absurde, en supposant que $\zeta \in W = E^{**} \setminus (J(x) + \varepsilon \overline{B}_{E^{**}})$. Remarquons que $\overline{B}_{E^{**}}$ est fermée pour la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$ d'après le théorème 1.3.8 et donc $J(x) + \varepsilon \overline{B}_{E^{**}}$ est aussi fermé pour $\sigma(E^{**}, E^*)$. Ainsi W est un voisinage ouvert de ζ pour la topologie faible*. En appliquant une nouvelle fois le lemme de Goldstine, on en déduit que $(V \cap W) \cap J(\overline{B}_E) \neq \emptyset$. Autrement dit, il existe $\hat{x} \in \overline{B}_E$ tel que $J(\hat{x}) \in V \cap W$. On obtient alors (puisque $J(x)$, $J(\hat{x}) \in V$)

$$|\langle f, x \rangle - \langle \zeta, f \rangle| < \frac{\delta}{2}$$

et

$$|\langle f, \hat{x} \rangle - \langle \zeta, f \rangle| < \frac{\delta}{2}$$

D'où

$$2\langle \zeta, f \rangle \leq \langle f, x + \hat{x} \rangle \leq \|x + \hat{x}\| + \delta,$$

et d'après (1.7), on obtient que

$$\left\| \frac{x + \hat{x}}{2} \right\| \geq 1 - \delta.$$

Par conséquent l'uniforme convexité de E implique que $\|x - \hat{x}\| \leq \varepsilon$. Mais comme $J(\hat{x}) \in W$, on a $\|x - \hat{x}\| = \|J(x) - J(\hat{x})\| > \varepsilon$, ce qui est absurde. On a donc montré que si $\zeta \in E^{**}$, $\|\zeta\| = 1$, alors $\zeta \in J(\overline{B}_E)$. Un argument de linéarité/convexité permet alors de conclure que $J(E) = E^{**}$.

$\square$

1.9 Applications : espaces L^p

Dans cette section, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$, muni de la mesure de Lebesgue dx et on suppose que le lecteur est familé avec les notions de fonction intégrable, fonction mesurable et les résultats standard d'intégration (théorème de convergence monotone, théorème de convergence dominée de Lebesgue, théorème de Fubini,...). On renvoie le lecteur au cours de L3 d'intégration et de M1 analyse fonctionnelle.

Définition 1.9.1 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$. On pose*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ est mesurable et } \|f\|_p < +\infty\},$$

où

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f(x)|^p \, dx.$$

On pose également

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ est mesurable et il existe une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

On note

$$\|f\|_\infty = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

On vérifie alors que L^p est un espace de Banach, pour $1 \leq p \leq +\infty$. De plus, on a l'inégalité suivante dite inégalité de Hölder : soit $f \in L^p$, $g \in L^q$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et q l'exposant conjugué de p (i.e. $1/p + 1/q = 1$) ; alors $fg \in L^1$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Enfin, on rappelle que si $C_c(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues sur Ω, à support compact, alors l'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Dans cette section, nous voulons discuter de la réflexivité et de la séparabilité des espaces L^p. Nous allons distinguer trois cas : $1 < p < +\infty$, $p = 1$ et $p = +\infty$.

1.9.1 Etude de L^p pour $1 < p < +\infty$.

Il s'agit du cas le plus favorable. Comme nous allons le voir, L^p est réflexif, séparable et le dual de L^p s'identifie isométriquement à L^q.

Théorème 1.9.2 *Soit $1 < p < +\infty$. Alors l'espace L^p est réflexif.*

Preuve : La démonstration se fait en trois étapes.

1ère **étape (Inégalité de Clarkson) :** soit $2 \leq p < +\infty$. Montrons que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p), \tag{1.8}$$

pour toute fonction $f, g \in L^p$. Il suffit bien sûr de montrer que

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p), \tag{1.9}$$

pour tous réels a, b. On a

$$\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2},$$

pour tous $\alpha, \beta \geq 0$ (on se ramène au cas où $\beta = 1$ et on note que la fonction $x \longmapsto (x^2+1)^{p/2} - x^p - 1$ est croissante sur $[0, +\infty[$). En prenant $\alpha = \left|\frac{a+b}{2}\right|$ et $\beta = \left|\frac{a-b}{2}\right|$, on obtient

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2\right)^{p/2} = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)^{p/2} \leq \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p,$$

(l'avant dernière égalité est l'identité du parallélogramme et la dernière inégalité provient de la convexité de la fonction $x \longmapsto x^{p/2}$ car $p \geq 2$).

2ème **étape :** montrons que L^p est uniformément convexe, et donc réflexif pour $2 \leq p < +\infty$. Soient $\varepsilon > 0$ et $f, g \in L^p$ tels que $\|f\|_p \leq 1$, $\|g\|_p \leq 1$ et $\|f-g\|_p > \varepsilon$. En utilisant (1.8), on obtient que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

et donc
$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p < 1-\delta,$$
avec
$$\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}.$$
Ainsi L^p est uniformément convexe et donc réflexif grâce au théorème 1.8.4.

3$^{\text{ème}}$ **étape :** montrons que L^p est réflexif pour $1 < p \leq 2$. Pour $u \in L^p$ et $f \in L^q$ (p et q conjugué), on pose
$$(Tu)(f) = \int_\Omega uf.$$
Il est clair que Tu est une application linéaire sur L^q, qui est continue car d'après l'inégalité de Holdër, on a
$$|(Tu)(f)| \leq \|u\|_p \|f\|_q.$$
Ainsi Tu est un élément de $(L^q)^*$ et on a $\|Tu\|_{(L^q)^*} \leq \|u\|_p$. D'autre part, posons
$$f_0(x) = \begin{cases} |u(x)|^{p-2}u(x) & \text{si } u(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } u(x) = 0. \end{cases}$$
On vérifie facilement que $f_0 \in L^q$, $\|f_0\|_q = \|u\|_p^{p-1}$ et $(Tu)(f_0) = \|u\|_p^p$. D'où
$$\|Tu\|_{(L^q)^*} \geq \frac{|(Tu)(f_0)|}{\|f_0\|_q} = \|u\|_p.$$
Donc finalement on a $\|Tu\|_{(L^q)^*} = \|u\|_p$. On en déduit que T est une isométrie de L^p sur un sous-espace fermé de $(L^q)^*$. Or L^q est réflexif d'après la première étape et le corollaire 1.5.7 implique alors que $(L^q)^*$ est réflexif et donc $T(L^p)$ est réflexif d'après le corollaire 1.5.6. Finalement, comme T est une isométrie, on en déduit que L^p est réflexif.

□

Remarque 1.9.3 *Pour montrer la réflexivité de L^p pour $1 < p \leq 2$, on a utilisé un argument de dualité. En fait, on peut aussi montrer que L^p est uniformément* *convexe dans le cas $1 < p \leq 2$. Pour cela, on peut utiliser une autre inégalité de Clarkson, valable pour $1 < p \leq 2$, à savoir :*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \leq \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{1/(p-1)}.$$

Mais cette inégalité est plus difficile à obtenir. On trouvera dans l'exercice 1.11.25 une preuve assez simple de l'uniforme convexité de L^p $(1 < p \leq 2)$ sans cette inégalité.

Théorème 1.9.4 (Théorème de représentation de Riesz) *Soit $1 < p < +\infty$, q son exposant conjugué et soit $\varphi \in (L^p)^*$. Alors il existe une unique fonction $u \in L^q$ telle que*

$$\langle \varphi, f\rangle = \int uf, \qquad (f \in L^p).$$

De plus, on a

$$\|\varphi\|_{(L^p)^*} = \|u\|_q.$$

Preuve : On définit l'opérateur $T : L^q \longrightarrow (L^p)^*$ par

$$\langle Tu, f\rangle = \int \Omega uf, \qquad f \in L^p.$$

On vérifie que T est un opérateur linéaire et continue et on a

$$\|Tu\|_{(L^p)^*} = \|u\|_q, \qquad u \in L^q.$$

Il reste à montrer que T est surjectif. Posons $E = T(L^q)$. Comme E est un sous-espace vectoriel fermé, il suffit de montrer que E est dense dans $(L^p)^*$. Soit $h \in (L^p)^{**}$ tel que $\langle h, Tu, \rangle = 0$, pour tout $u \in L^q$. On doit montrer que $h = 0$. Comme L^p est réflexif, il existe $f \in L^p$ tel que $h = J(f)$, où $J : L^p \to (L^p)^{**}$ est l'injection canonique. On obtient donc que

$$0 = \langle h, Tu\rangle = \langle J(f), Tu\rangle = \langle Tu, f\rangle = \int_\Omega uf,$$

pour tout $u \in L^q$. En choisant $u = |f|^{p-2}f$, on obtient que $\|f\|_p = 0$, soit $f = 0$, i.e. $h = 0$.

$\square$

Remarque 1.9.5 *Le théorème de représentation de Riesz est très important. Il exprime que toute forme linéaire continue sur L^p, avec $1 < p < +\infty$, se représente à l'aide d'une fonction de L^q. L'application $\varphi \longmapsto u$ est un opérateur linéaire isométrique et surjectif qui permet d'identifier le dual de L^p avec L^q. Ainsi si $1 < p < +\infty$ et si q vérifie $1/p + 1/q = 1$, on fera systématiquement l'identification*

$$(L^p)^* = L^q.$$

Théorème 1.9.6 *Soit $1 \leq p < +\infty$. Alors l'espace L^p est séparable.*

Preuve : On désigne par $(R_i)_{i\in I}$ la famille dénombrable des pavés R de la forme

$$R = \prod_{k=1}^{N}]a_k, b_k[,$$

avec $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$ et $R \subset \Omega$. On désigne par E l'espace vectoriel engendré par les fonctions χ_{R_i} (la fonction indicatrice de R_i), $i \in I$. D'après le lemme 1.6.2, il suffit de montrer que E est dense dans $L^p(\Omega)$. Soient $f \in L^p$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Par densité de $C_c(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$, il existe $f_1 \in C_c(\Omega)$ telle que $\|f - f_1\|_p < \varepsilon$. Considérons Ω' un ouvert borné tel que $\text{supp}(f_1) \subset \Omega' \subset \Omega$. Comme $f_1 \in C_c(\Omega')$, en utilisant l'uniforme continuité de f_1, on construit aisément une fonction $f_2 \in E$ telle que $\text{supp}(f_2) \subset \Omega'$ et

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{1/p}},$$

pour presque tout x sur Ω' (on commence par recouvrir $\text{supp}(f_1)$ par un nombre fini de pavés R_i sur lesquels l'oscillation de f_1 est inférieure à $\frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{1/p}}$). Il en résulte que $\|f_2 - f_1\|_p \leq \varepsilon$ et donc $\|f - f_2\|_p < 2\varepsilon$. Ceci achève la preuve de la densité de E et du théorème.

$\square$

Remarque 1.9.7 *On verra dans l'exercice 1.11.26 une autre preuve de la séparabilité de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$.*

1.9.2 Etude de L^1.

Commençons par déterminer le dual de L^1.

Théorème 1.9.8 *Soit $\varphi \in (L^1)^*$. Alors il existe une unique fonction $u \in L^\infty$ telle*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf, \qquad \forall f \in L^1.$$

De plus, $\|\varphi\|_{(L^1)^*} = \|u\|_\infty$.

Preuve : Commençons par prouver l'existence de u. On fixe une fonction $w \in L^2(\Omega)$ telle que, pour tout compact $K \subset \Omega$, $w \geq \varepsilon_K > 0$ p.p. sur K (il est clair qu'une telle fonction existe : on peut prendre par exemple $w(x) = \alpha_n$ pour $x \in \Omega$, $n \leq |x| < n+1$, et ajuster les constantes α_n pour que $w \in L^2(\Omega)$). Remarquons maintenant que l'application $f \longmapsto \langle \varphi, wf \rangle$ est une forme linéaire continue sur L^2 (remarquons que l'inégalité de Hölder implique que $wf \in L^1(\Omega)$ pour toute $f \in L^2(\Omega)$). Ainsi, d'après le théorème de Riesz, il existe une fonction $v \in L^2$ telle que

$$\langle \varphi, wf \rangle = \int_\Omega vf, \qquad \forall f \in L^2(\Omega). \tag{1.10}$$

Posons $u(x) = \dfrac{v(x)}{w(x)}$ (ceci a un sens puisque $w(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$). La fonction u est mesurable. Montrons que $u \in L^\infty(\Omega)$ et $\|u\|_\infty \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*}$. D'après (1.10), on a

$$\left| \int_\Omega vf \right| \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*} \|wf\|_1, \qquad \forall f \in L^2(\Omega). \tag{1.11}$$

Soit $C > \|\varphi\|_{(L^1)^*}$. Montrons que l'ensemble

$$A = \{x \in \Omega; |u(x)| > C\}$$

est négligeable. Raisonnons par l'absurde. Si A n'est pas négligeable, alors il existe $\tilde{A} \subset A$ mesurable tel que $0 < |\tilde{A}| < +\infty$ (ici $|\tilde{A}|$ désigne la mesure du borélien

$\tilde{A}$). En reportant dans (1.11) la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in \tilde{A} \text{ et } u(x) > 0 \\ -1 & \text{si } x \in \tilde{A} \text{ et } u(x) < 0 \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \tilde{A}, \end{cases}$$

on obtient

$$\int_{\tilde{A}} |u| w \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*} \int_{\tilde{A}} w.$$

Ainsi

$$C \int_{\tilde{A}} w \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*} \int_{\tilde{A}} w,$$

ce qui est absurde puisque $\displaystyle\int_{\tilde{A}} w > 0$. On en déduit donc que A est négligeable, c'est-à-dire que $u \in L^\infty(\Omega)$ et $\|u\|_\infty \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*}$. On a donc construit une fonction $u \in L^\infty(\Omega)$ avec $\|u\|_\infty \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*}$ et telle que

$$\langle \varphi, wf \rangle = \int_\Omega uwf, \qquad \forall f \in L^2(\Omega). \tag{1.12}$$

Il en résulte que

$$\langle \varphi, g \rangle = \int_\Omega ug, \qquad \forall g \in C_c(\Omega). \tag{1.13}$$

En effet, si $g \in C_c(\Omega)$, alors la fonction $f = g/w$ appartient à $L^2(\Omega)$ (puisque $w \geq \varepsilon > 0$ sur supp(g)) et on peut reporter f dans (1.12) pour obtenir (1.13). En utilisant maintenant la densité de $C_c(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$, on déduit de (1.13) que

$$\langle \varphi, g \rangle = \int_\Omega ug, \qquad \forall g \in L^1(\Omega).$$

Enfin on a

$$|\langle \varphi, g \rangle| \leq \int_\Omega |ug| \leq \|u\|_\infty \|g\|_1, \qquad \forall g \in L^1(\Omega),$$

ce qui donne $\|\varphi\|_{(L^1)^*} \leq \|u\|_\infty$. Par conséquent, $\|\varphi\|_{(L^1)^*} = \|u\|_\infty$. L'unicité de u est une conséquence immédiate de la propriété suivante bien connue : soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega fu = 0, \qquad \forall u \in C_c(\Omega);$$

alors $f = 0$ p.p. sur Ω.

$\square$

Remarque 1.9.9 *Le théorème 1.9.8 est très important. Il exprime que toute forme linéaire continue sur L^1 se représente à l'aide d'une fonction de L^∞. L'application $\varphi \longmapsto u$ est une isométrie surjective qui permet d'identifier le dual de L^1 avec L^∞. Ainsi on fera systématiquement l'identification*

$$(L^1)^* = L^\infty.$$

Théorème 1.9.10 *L'espace L^1 n'est pas réflexif.*

Preuve : Soit $x_0 \in \Omega$ et considérons la suite $f_n = \alpha_n \chi_{B(x_0,1/n)}$ avec n assez grand pour que $B(0,1/n) \subset \Omega$ et $\alpha_n = |B(0,1/n)|^{-1}$ de sorte que $\|f_n\|_1 = 1$. Si $L^1(\Omega)$ était réflexif, alors, d'après le corollaire 1.7.5, il existerait une sous-suite (f_{n_k}) et une fonction $f \in L^1(\Omega)$ telle que $f_{n_k} \rightharpoonup f$ faiblement pour $\sigma(L^1, L^\infty)$. Donc

$$\int_\Omega f_{n_k}\varphi \to \int_\Omega f\varphi, \qquad \forall \varphi \in L^\infty(\Omega). \tag{1.14}$$

Lorsque $\varphi \in C_c(\Omega \setminus \{x_0\})$, on voit que

$$\int_\Omega f_{n_k}\varphi = 0,$$

pour tout k suffisamment grand. Donc

$$\int_\Omega f\varphi = 0, \qquad \forall \varphi \in C_c(\Omega \setminus \{x_0\}).$$

Ainsi on obtient que $f = 0$ p.p. sur $\Omega \setminus \{x_0\}$, soit $f = 0$ p.p. sur Ω. Par ailleurs, si on prend $\varphi \equiv 1$, on obtient avec (1.14)

$$\int_\Omega f = 1,$$

ce qui est absurde.

$\square$

1.9.3 Etude de L^∞.

Le théorème 1.9.8 a montré que $L^\infty = (L^1)^*$ et dans le théorème, on a vu que $L^1(\Omega)$ est séparable. De ce fait, l'espace L^∞ possède quelques propriétés qui méritent d'être soulignées. Ente autres, la boule unité fermée $\overline{B}_{L^\infty}$ est compacte et métrisable pour la topologie faible* $\sigma(L^\infty, L^1)$. Ainsi si $(f_n)_n$ est une suite bornée dans L^∞, alors on peut extraire une sous-suite qui converge dans L^∞ pour la topologie faible* $\sigma(L^\infty, L^1)$. Toutefois remarquons que L^∞ n'est pas réflexif (car sinon, d'après le corollaire 1.5.7 L^1 le serait et on sait que ce n'est pas d'après le théorème 1.9.10).

Comme $L^\infty = (L^1)^*$, on a $L^1 \subset (L^1)^{**} = (L^\infty)^*$ et donc le dual de L^∞ contient L^1. De plus, il est strictement plus grand sinon L^1 serait réflexif. Donc il existe des formes φ linéaires et continues sur L^∞ qui ne sont pas du type

$$\langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega \varphi f, \qquad \forall f \in L^\infty,$$

pour un certain $u \in L^1$. Fabriquons un exemple explicite. Supposons que $0 \in \Omega$ et soit $\varphi_0 : C_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_0(f) = f(0)$, pour $f \in C_c(\Omega)$. Il est clair que φ_0 est une forme linéaire et continue sur $C_c(\Omega)$ pour la norme infinie. D'après le théorème de Hahn–Banach, φ_0 se prolonge en une forme linéaire et continue sur L^∞, notée φ. On a

$$\langle \varphi, f\rangle = f(0), \qquad \forall f \in C_c(\Omega). \tag{1.15}$$

Supposons qu'il existe une fonction $u \in L^1$ telle que

$$\langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega \varphi f, \qquad \forall f \in L^\infty.$$

Alors, on a

$$\int_\Omega uf = 0, \qquad \forall f \in C_c(\Omega \setminus \{0\}).$$

Ceci entraîne que $u = 0$ p.p. sur $\Omega \setminus \{x_0\}$, soit $u = 0$ p.p. sur Ω. Par conséquent,

$$\langle \varphi, f\rangle = 0, \qquad \forall f \in L^\infty,$$

ce qui est contraire à (1.15).

Théorème 1.9.11 *L'espace L^∞ n'est pas séparable.*

Preuve : Pour tout $a \in \Omega$, fixons $r_a < \mathrm{dist}(a, {}^c\Omega)$. On pose $u_a = \chi_{B(a,r_a)}$ et

$$O_a = \{f \in L^\infty : \|f - u_a\|_\infty < 1/2\}.$$

On vérifie facilement que la famille $(O_a)_{a\in\Omega}$ satisfait les hypothèses du lemme 1.6.3. On conclut donc que L^∞ n'est pas séparable.

□

Le tableau suivant résume les propriétés principales des espaces L^p.

	Réflexif	Séparable	Espace dual
L^p, $1 < p < +\infty$	Oui	Oui	L^q
L^1	Non	Oui	L^∞
L^∞	Non	Non	contient strictement L^1

1.10 Supplémentaire topologique, sous-espaces de dimension et de codimension finie

Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe toujours un espace vectoriel N de E tel que $E = M \oplus N$. Mais en général, l'application projection

$$\begin{array}{rccc} p: & E = M \oplus N & \longrightarrow & M \\ & x = x_M + x_N & \longmapsto & x_M \end{array}$$

n'est pas continue.

Définition 1.10.1 *Soit M un sous-espace vectoriel* **fermé** *d'un espace vectoriel normé E. On dit que M admet un supplémentaire topologique s'il existe un sous-espace vectoriel fermé N de E tel que $E = M \oplus N$.*

Nous allons voir que, dans le cadre d'un espace de Banach E, si M admet un supplémentaire topologique dans E, alors la projection sur M est continue et réciproquement. Tout d'abord, nous allons montrer le résultat suivant, basé sur le théorème de l'application ouverte.

Lemme 1.10.2 *Soit E un espace de Banach, M et N deux sous-espaces vectoriels fermés de E et supposons que $E = M + N$ (on ne suppose pas que la somme est directe). Alors il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $(a, b) \in M \times N$ tel que*

$$x = a + b \quad \textit{et} \quad \|a\| + \|b\| \leq \gamma\|x\|.$$

Preuve : Munissons $M \times N$ de la norme suivante

$$\|(a, b)\|_{M\times N} := \|a\| + \|b\|, \qquad (a, b) \in M \times N.$$

Il est facile de vérifier que M et N étant fermé, $(M \times N, \|\cdot\|_{M\times N})$ est un espace de Banach. Maintenant considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M \times N & \longrightarrow & E \\ & (a, b) & \longmapsto & a + b. \end{array}$$

L'application φ est clairement linéaire et surjective (car $E = M + N$). De plus, elle est continue car

$$\|\varphi(a, b)\| = \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| = \|(a, b)\|_{M\times N}.$$

Le théorème de l'application ouverte permet alors de conclure à l'existence d'une constante $\gamma > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $(a, b) \in M \times N$ tel que

$$x = \varphi(a, b) = a + b \quad \text{et} \quad \|a\| + \|b\| = \|(a, b)\|_{M\times N} \leq \gamma\|x\|.$$

$\square$

Théorème 1.10.3 *Soit E un espace de Banach et M un sous-espace vectoriel fermé de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M admet un supplémentaire topologique.*

(ii) *Il existe une projection P (P^2=P) continue dans $\mathcal{L}(E)$ telle que Im $P = M$.*

Remarquons que si $P \in \mathcal{L}(E)$ est une projection, alors Im $P = \ker(Id_E - P)$ et en particulier Im P est automatiquement fermée (car $Id_E - P$ est continue !).

Preuve : (i) $\Longrightarrow$ (ii) : on suppose qu'il existe un sous-espace N fermé tel que $E = N \oplus M$. Définissons

$$\begin{array}{rccc} P : & E = M \oplus N & \longrightarrow & M \\ & x + y & \longmapsto & x \end{array}$$

On vérifie alors facilement que P est un projection et Im $P = M$. La continuité de P découle du Lemme 1.10.2.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : il suffit de considérer $N = \ker P$ qui est fermé car P est continue. Comme P est une projection, on a toujours $E = \ker P \oplus \text{Im } P = M \oplus N$.

□

Remarque 1.10.4 *Si on regarde attentivement la preuve du théorème 1.10.3, on voit que l'implication* (ii) $\Longrightarrow$ (i) *n'utilise pas la complétude de E. Autrement dit, si E est un espace vectoriel normé, M un sous-espace vectoriel fermé de E et s'il existe une projection $P \in \mathcal{L}(E)$ telle que Im $P = M$, alors M admet un supplémentaire topologique.*

Nous allons voir un résultat qui donne des conditions suffisantes pour qu'il existe un supplémentaire topologique.

Lemme 1.10.5 *Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors M admet un supplémentaire topologique dans les deux cas suivants.*

(a) *L'espace M est de dimension finie.*

(b) *L'espace quotient E/M est de dimension finie.*

Preuve : (a) : supposons que $n := \dim M < \infty$ et soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de M et $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ la base duale. Autrement dit, e_i^* est défini par

$$e_i^* \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right) = \lambda_i.$$

Il est clair que e_i^* est une forme linéaire sur M et elle est nécessairement continue car dim $M < +\infty$. D'où $e_i^* \in M^*$. Par le théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger chaque forme linéaire e_j^* en une forme linéaire continue $x_j^* \in E^*$. Il suffit alors de poser

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x)e_j, \qquad (x \in E)$$

On vérifie alors que P est une projection continue et $M = \text{Im } P$. La remarque 1.10.4 permet alors de conclure que M admet un supplémentaire topologique.

(b) : supposons maintenant que $n := \dim(E/M) < \infty$. Notons

$$\pi_M : E \longrightarrow E/M$$

la surjection canonique et soit $(\pi_M(e_1), \pi_M(e_2), \ldots, \pi_M(e_n))$ une base de E/M. Considérons

$$N := \text{Vect } \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

et montrons que N est un supplémentaire topologique pour M. Tout d'abord, remarquons que N est de dimension finie (au plus n) et donc N est un sous-espace fermé de E. Vérifions maintenant que $M \cap N = \{0\}$. Soit $x \in M \cap N$. Il existe alors $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Comme $x \in M$, on a $\pi_M(x) = 0$ et donc

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi_M(e_i).$$

Mais $(\pi_M(e_1), \pi_M(e_2), \ldots, \pi_M(e_n))$ étant une base, cette dernière égalité implique que $\lambda_i = 0$, pour tout i et donc $x = 0$. Ceci achève de prouver que $M \cap N = \{0\}$. Il reste à montrer que $E = M + N$. Pour cela, considérons $x \in E$ quelconque. Alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\pi_M(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

On peut réécrire cette égalité sous la forme

$$\pi_M\left(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0,$$

d'où, en posant

$$a := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

on obtient que $x - a \in \ker \pi_M = M$. Comme $a \in N$, on obtient que $x \in M + N$, ce qui achève la démonstration.

$\square$

Remarque 1.10.6 *Dans le cas où* $n = \dim(E/M) < +\infty$, *alors tout supplémentaire topologique* N *est de dimension* n. *En effet, il suffit de remarquer que si* $E = M \oplus N$, *alors l'espace quotient* E/M *est isomorphe à* N.

Remarque 1.10.7 *Si* $n = \dim(E/M) < +\infty$, *alors pour tout sous-espace* G *tel que* $\dim G > n$, *on a* $M \cap G \neq \{0\}$. *En effet, supposons par l'absurde qu'il existe* G *un sous-espace vectoriel de* E *tel que* $\dim G > n$ *et* $M \cap G = \{0\}$. *Si* $\pi = \pi_M$ *désigne la projection canonique de* E *sur* E/M, *alors* $\pi_{|G}$ *est injective car*

$$\ker(\pi_{|G}) = \ker \pi \cap G = M \cap G = \{0\}.$$

Donc $\dim(\pi(G)) = \dim G > \dim(E/M)$, *ce qui est absurde car* $\pi(G)$ *est un sous-espace vectoriel de* E/M.

Définition 1.10.8 *Si* M *est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace vectoriel normé* E, *on appelle codimension de* M *la dimension du quotient* E/M. *On la note* $\operatorname{codim} M$.

Remarquons que d'après le lemme 1.10.5 et la remarque 1.10.6 si M est un espace de codimension finie dans un espace vectoriel normé E, alors $\operatorname{codim} M = \dim N$, où N est un supplémentaire topologique de M dans E.

Nous donnons maintenant deux lemmes simples mais utiles autour de cette notion de codimension.

Lemme 1.10.9 *Soient E un espace vectoriel normé, G un sous-espace vectoriel fermé strict de E et $x_0 \in E \setminus G$. Notons $M := G \oplus \mathbb{K}x_0$. Supposons que M soit de codimension finie. Alors G est aussi de codimension finie et on a*

$$\operatorname{codim} G = \operatorname{codim} M + 1.$$

Preuve : D'après le lemme 1.10.5 et la remarque 1.10.6, il existe un sous-espace vectoriel fermé N de E tel que $E = M \oplus N$ et $\dim N = \operatorname{codim} M$. D'où

$$E = M \oplus N = G \oplus \mathbb{K}x_0 \oplus N.$$

On vérifie alors facilement que E/G est isomorphe à $N \oplus \mathbb{K}x_0$. Donc

$$\operatorname{codim} G = \dim (N \oplus \mathbb{K}x_0) = \dim N + 1 = \operatorname{codim} M + 1,$$

ce qui prouve le lemme.

$\square$

Lemme 1.10.10 *Soient E un espace vectoriel normé, M et N deux sous-espaces vectoriels fermés de E tels que $M \cap N = \{0\}$. Si $\dim M = \operatorname{codim} N < \infty$, alors $E = M \oplus N$.*

Preuve : soit $\pi = \pi_N$ la projection canonique de E sur E/N. Comme $M \cap N = \{0\}$, l'application $\pi_{|M}$ est injective. D'où

$$\dim (\pi(M)) = \dim M = \operatorname{codim} N = \dim (E/N).$$

Ainsi $\pi(M) = E/N = \pi(E)$. Maintenant si $x \in E$ quelconque, alors $\pi(x) \in \pi(E) = \pi(M)$. Ainsi il existe $x_M \in M$ tel que $\pi(x) = \pi(x_M)$. D'où $x - x_M \in \ker \pi = N$. On en déduit donc que $x \in M + N$. Ceci prouve que $E = M + N$ et donc finalement $E = M \oplus N$.

$\square$

1.11 Exercices

Exercice 1.11.1 *Soient* (X, τ) *un espace topologique et* A *une partie de* X*. Montrer que l'adhérence de* A *est égale à l'ensemble des points qui lui sont adhérents.*

Exercice 1.11.2 *Soit* E *un ensemble avec au moins deux éléments. On définit une métrique de la façon suivante : pour* $x, y \in E$*, on pose*

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit $a \in E$.

(a) *Déterminer* $B(a,1)$*-la boule ouverte de centre* a *et de rayon* 1.

(b) *Déterminer* $B_f(a,1)$*-la boule fermée de centre* a *et de rayon* 1.

(c) *Comparer* $\overline{B(a,1)}$ *et* $B_f(a,1)$.

(d) *Si* $(E, \|\cdot\|)$ *est un espace normé, quelle relation y-a-t-il entre* $\overline{B(a,1)}$ *et* $B_f(a,1)$ *?*

Exercice 1.11.3 *Soit* $\mathcal{B}$ *un ensemble de parties d'un ensemble* X*. Montrer que* $\mathcal{B}$ *est une base de topologie sur* X *(i.e. il existe une topologie sur* X *telle que* $\mathcal{B}$ *en soit une base) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(B1) *l'intersection de deux ensembles de* $\mathcal{B}$ *est une réunion d'ensembles de* $\mathcal{B}$ *;*

(B2) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

Exercice 1.11.4 *Soit* X *un espace topologique. Montrer qu'un ensemble* $\mathcal{B}$ *de parties ouvertes est une base de la topologie de* X *si et seulement si, pour tout* $x \in X$*,* $\{O \in \mathcal{B} : x \in O\}$ *est une base de voisinages de* x.

Exercice 1.11.5 *Démontrer le théorème 1.2.9 sans utiliser le lemme 1.2.8 (autrement dit prouver que* $\tau \subset \tau_d$*, avec les notations du théorème 1.2.9).*

Exercice 1.11.6 *Soit la suite* $(\delta_n)_{n\geq 1} \subset (\ell^\infty)^*$ *définie par*

$$\begin{array}{rccc} \delta_n : & \ell^\infty & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x_p)_{p\geq 1} & \longmapsto & x_n. \end{array}$$

Montrer que $(\delta_n)_{n\geq 1}$ *possède une valeur d'adhérence pour la topologie faible** *mais ne possède pas de sous-suite convergente pour cette topologie.*

Exercice 1.11.7 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ *une famille de semi-normes sur* E*. On note* τ *la topologie engendrée par cette famille de semi-normes. Décrire les ouverts pour la topologie* τ *et donner une base de voisinage de cette topologie.*

Exercice 1.11.8 *Soient* X *un ensemble et* Y *un espace topologique. Montrer que la topologie de la convergence simple sur* $\mathcal{F}(X,Y)$ *correspond à la topologie produit (si on voit* $\mathcal{F}(X,Y)$ *comme l'espace produit* $\prod_{x\in X} Y_x$*, où* $Y_x = Y$ *pour tout* $x \in X$*).*

Exercice 1.11.9 *Soit* Ω *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^d$ *où* $d \in \mathbb{N}^*$*. On note* $C(\Omega)$ *l'espace vectoriel des applications continues de* Ω *dans* $\mathbb{C}$*.*

(a) *Montrer qu'il existe une suite de compacts* $(K_n)_{n\geq}$ *de* Ω *vérifiant les trois propriétés suivantes :*

   (i) *tout compact* K *de* Ω *est inclus dans un* K_n *;*

   (ii) *pour tout* $n \geq 1$*, le compact* K_n *est inclus l'intérieur du compact* K_{n+1} *;*

   (iii) *on a* $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} K_n$*.*

   Une telle suite s'appelle une suite exhaustive de compacts associée à l'ouvert Ω*.*

(b) *Pour chaque* $n \geq 1$ *et chaque* $f \in C(\Omega)$*, on pose*

$$p_n(f) := \sup_{x\in K_n} |f(x)|.$$

   Vérifier que p_n *est une semi-norme sur* $C(\Omega)$*,* $n \geq 1$*. On note alors* τ *la topologie sur* $C(\Omega)$ *engendrée par cette famille de semi-normes* $(p_n)_{n\geq 1}$*.*

(c) *Montrer que l'espace* $C(\Omega)$, *muni de la topologie* τ, *est métrisable et complet.*

(d) *Montrer qu'une suite* $(f_n)_n$ *converge vers* f *dans* $C(\Omega)$ *si et seulement si* $(f_n)_n$ *converge vers* f *uniformément sur tout compact de* Ω.

(e) *Montrer que la topologie de* $C(\Omega)$ *n'est pas normable.*

Exercice 1.11.10 *Soit* E *un espace de Banach de dimension infinie.*

(a) *Soient* $x_0 \in E$, $\varepsilon > 0$ *et* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in E^*$. *On note*

$$V = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}.$$

(i) *Montrer qu'il existe* $y_0 \in E$, $y_0 \neq 0$ *tel que*

$$\langle f_i, y_0 \rangle = 0, \forall i = 1, \ldots, n.$$

Indication : *on pourra raisonner par l'absurde.*

(ii) *En déduire que* V *contient une droite passant par* x_0.

(b) *Montrer que tout voisinage de* x_0 *pour la topologie faible* $\sigma(E, E^*)$ *contient une droite passant par* x_0.

(c) *Soit* $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$.

(i) *Soit* $x_0 \in E$, $\|x_0\| < 1$. *Montrer que* $x_0 \in \overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$*-la fermeture de* S *pour la topologie faible* $\sigma(E, E^*)$.

Indication : *on pourra utiliser la question* (b).

(ii) *Montrer que*

$$\overline{S}^{\sigma(E,E^*)} = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

En déduire que S *n'est pas fermé pour la topologie faible* $\sigma(E, E^*)$.

Exercice 1.11.11 *Soit* E *un espace de Banach de dimension infinie et*

$$U = \{x \in E : \|x\| < 1\}.$$

Montrer que U *n'est pas ouvert pour la topologie faible* $\sigma(E, E^*)$.

Indication : *on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question* (b) *de l'exercice 1.11.10.*

Exercice 1.11.12 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ et la topologie forte coincident.*

Exercice 1.11.13 *Soit E un espace vectoriel normé tel que $\dim E = +\infty$. On se propose de montrer que la topologie faible n'est pas métrisable. Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une distance d sur E dont la topologie est équivalente à $\sigma(E, E^*)$.*

(a) *Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de E^* telle que, pour tout $k \geq 1$, il existe une partie finie $I_k \subset \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon_k > 0$ tels que*

$$\bigcap_{i\in I_k} \{x \in E : |\langle f_i, x\rangle| < \varepsilon_k\} \subset B_d(0, 1/k),$$

où $B_d(0, 1/k) = \{x \in E : d(0, x) < 1/k\}$.

(b) *Soient $g \in E^*$ et $V = \{x \in E : |\langle g, x\rangle| < 1\}$. Montrer qu'il existe une partie finie $I \subset \mathbb{N}$ tel que*

$$\bigcap_{i\in I} \ker f_i \subset V,$$

puis

$$\bigcap_{i\in I} \ker f_i \subset \ker g.$$

On note $I = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$.

(c) *On considère $F : E \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ définie par*

$$F(x) = (g(x), f_{n_1}(x), \ldots, f_{n_k}(x)).$$

Séparer Im F de $(1, 0, \ldots, 0)$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$. En déduire qu'il existe un k-uplet de réels $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ tel que

$$g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{n_i}.$$

(d) *Soit $F_n = vect(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $E^* = F_{n_0}$.*
<u>*Indication :*</u> *remarquer que $E^* = \cup_n F_n$.*

(e) *Conclure.*

Exercice 1.11.14 *Dans cet exercice, on se propose de démontrer le résultat suivant : soit* $(x^n)_{n\geq 1}$ *une suite d'éléments de* ℓ^1 *telle que* $x^n \rightharpoonup 0$ *dans* ℓ^1*. Alors* $x^n \to 0$ *pour la topologie forte.*

Soit donc $(x^n)_{n\geq 1}$ *une suite d'éléments de* ℓ^1 *telle que* $x^n \rightharpoonup 0$ *pour la topologie faible* $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$.

(a) *Soit* $K = \{f \in \ell^\infty : \|f\|_\infty \leq 1\}$*. On note*

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n - g_n|}{2^n}.$$

Montrer que (K, d) *est un espace métrique.*

(b) *Montrer que, pour tout* $r > 0$ *et toute fonction* $f \in K$*, l'ensemble* Ω*, défini par*

$$\Omega = \{g \in K : d(f,g) < r\},$$

est un voisinage de f *dans* K *pour la topologie faible** $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$.

(c) *En déduire que* (K, d) *est un espace métrique compact.*

(d) *Soit* $\varepsilon > 0$ *fixé. On pose*

$$F_k = \{f \in K : |\langle f, x^n \rangle| \leq \varepsilon, \forall n \geq k\}.$$

Montrer qu'il existe $f^0 \in K$*, il existe* $\rho > 0$ *et il existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$f \in K \text{ et } d(f^0, f) < \rho \Longrightarrow f \in F_{k_0}.$$

<u>Indication :</u> on pourra appliquer le théorème de Baire.

(e) *Soit* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $2^{N-1} > 1/\rho$*. Montrer que pour tout* $n \geq k_0$*, on a*

$$\|x^n\|_1 \leq \varepsilon + 2 \sum_{i=1}^{N} |x_i^n|.$$

<u>Indication :</u> choisir $f = (f_1^0, f_2^0, \ldots, f_N^0, \pm 1, \pm 1, \ldots)$ *et utiliser le fait que* $f \in F_{k_0}$.

(f) *Conclure.*

On vient de démontrer que l'application id : $(\ell^1, \sigma(\ell^1, \ell^\infty)) \longrightarrow (\ell^1, \|\cdot\|_1)$ *est séquentiellement continue. Est-elle continue ?*

Exercice 1.11.15 *Soit E un ensemble muni de deux métriques d et d'. On suppose que toute suite convergente pour d est convergente pour d' et inversement. Montrer alors que les deux topologies induites par d et d' sont les mêmes. Remarquons que ce n'est plus vrai dans le cadre d'un espace topologique (voir exercice 1.11.14*

Exercice 1.11.16 *Soit E un espace de Banach et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de E qui converge faiblement vers un élément x de E. Montrer qu'il existe une suite de combinaisons convexes des x_n qui converge fortement vers x.*

Application : *que peut-on dire si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions définies sur un compact K à valeurs complexes et qui converge simplement vers une fonction f sur K ?*

Exercice 1.11.17 *Démontrer la proposition 1.4.5.*

Exercice 1.11.18 *Soit $\varphi : E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et semi-continue inférieurement (s.c.i.) pour la topologie forte. Montrer que φ est s.c.i. pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. En particulier, si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E^*)$, alors*

$$\varphi(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \varphi(x_n).$$

Exercice 1.11.19 *Soit $\varphi : E^* \to \mathbb{K}$ une application linéaire et continue pour la topologie faible* $\sigma(E^*, E)$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $x \in E$ telle que*

$$\varphi(f) = \langle f, x\rangle, \qquad \forall f \in E^*.$$

(a) *Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ tels que $|\varphi(f)| < 1$, pour tout $f \in V$, où*

$$V = \{f \in E^* : |\langle f, x_i\rangle| < \varepsilon, \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

(b) *Montrer qu'il existe* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f, x_i \rangle,$$

pour tout $f \in E^*$.

<u>*Indication :*</u> *on pourra montrer que si, pour tout* $i = 1, \dots, n$, $\langle f, x_i \rangle$, *alors* $\varphi(f) = 0$ *et utiliser la question* (c) *de l'Exercice 1.11.13.*

(c) *Conclure.*

Exercice 1.11.20 *Soient* E *un espace de Banach et* H *un hyperplan de* E^* *fermé pour la topologie faible** $\sigma(E^*, E)$. *Le but de l'exercice est de montrer que* H *est de la forme*

$$H = \{f \in E^* : \langle f, x \rangle = \alpha\},$$

pour un certain $x \in E$, $x \neq 0$ *et un certain* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ecrivons $H = \{f \in E^* : \varphi(f) = \alpha\}$ *où* φ *est une application linéaire de* E^* *dans* $\mathbb{R}$, $\varphi \not\equiv 0$. *Soit* $f_0 \notin H$.

(a) *Montrer qu'il existe* $\varepsilon > 0$ *et* $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ *tel que* $V \subset E^* \setminus H$, *où* V *est donné par*

$$V = \{f \in E^* : |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

(b) *Montrer que ou bien*

$$\varphi(f) < \alpha, \qquad \forall f \in V,$$

ou bien

$$\varphi(f) > \alpha, \qquad \forall f \in V.$$

<u>*Indication :*</u> *on pourra utiliser la connexité de* V.

(c) *Soit* $W = V - f_0 = \{f - f_0 : f \in V\}$. *Montrer que*

$$|\varphi(g)| \leq |\alpha - \varphi(f_0)|,$$

pour tout $g \in W$.

(d) *En déduire que* φ *est continue en* 0 *pour la topologie faible** $\sigma(E^*, E)$.

(e) *En déduire qu'il existe* $x \in E$ *tel que*

$$H = \{f \in E^* : \langle f, x \rangle = \alpha\}.$$

Exercice 1.11.21 *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et supposons qu'il existe* $\varphi : E \to F$ *un isomorphisme de* E *sur* F. *Montrer que* E *est réflexif si et seulement si* F *est réflexif.*

Exercice 1.11.22 *Soit* E *un espace de Banach réflexif et* K *une partie convexe, fermée et bornée de* E. *Montrer que* K *est compacte pour la topologie faible* $\sigma(E, E^*)$.

Exercice 1.11.23 *Soient* E *un espace de Banach réflexif,* $A \subset E$ *une partie convexe, fermée, non vide et* $\varphi : A \to]-\infty, +\infty]$ *une fonction convexe, s.c.i.,* $\varphi \not\equiv +\infty$ *telle que*

$$\lim_{x \in A, \|x\| \to +\infty} \varphi(x) = +\infty (\textit{si } A \textit{ est bornée, cette hypothèse est inutile}).$$

Montrer que φ *atteint son minimum sur* A.

<u>*Indication :*</u> *on pourra considérer* $a \in A$ *tel que* $\lambda_0 = \varphi(a) < +\infty$, *l'ensemble*

$$\widetilde{A} := \{x \in A : \varphi(x) \leq \lambda_0\}$$

et utiliser les exercices 1.11.22 et 1.11.18.

Exercice 1.11.24 *Soit* E *un espace de Banach uniformément convexe. Soit* $(x_n)_n$ *une suite de* E *telle que* $x_n \rightharpoonup x$ *pour la topologie faible* $\sigma(E, E^*)$ *et*

$$\liminf_{n \to +\infty} \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Montrer que $x_n \to x$ *fortement.*

<u>*Indication :*</u> *on pourra considérer* $\lambda_n := \max(\|x_n\|, \|x\|)$ *et* $y_n = \lambda_n^{-1} x_n$ *et* $y = \|x\|^{-1} x$ *; montrer alors que* $\|(y_n + y)/2\| \to 1$.

Exercice 1.11.25 . *Dans cet exercice, nous voulons montrer que L^p est uniformément convexe pour $1 < p \leq 2$.*

(a) *Fixons $1 < p_1 < +\infty$ et $p_2 \geq 2$ et soit $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$\varphi(t) = \left(\frac{1 + |t|^{p_1}}{2}\right)^{p_2/p_1} - \left(\frac{1+t}{2}\right)^{p_2}, \qquad (|t| \leq 1).$$

(i) *Montrer que φ est positive sur $[-1, 1]$.*

(ii) *En utilisant la formule de Taylor, montrer que*

$$\lim_{t \to 1^-} \frac{\varphi(t)}{(t-1)^2} = \varphi''(1) > 0.$$

(iii) *En déduire qu'il existe une constance $C = C(p_1, p_2) > 0$ telle que*

$$\varphi(t) \geq C(1-t)^{p_2},$$

pour tout $t \in [-1, 1]$.

(iv) *En déduire qu'il existe une constante $c = c(p_1, p_2) > 0$ telle que*

$$\left(\frac{1 + |t|^{p_1}}{2}\right)^{1/p_1} \geq \left(\left|\frac{1-t}{c}\right|^{p_2} + \left|\frac{1+t}{2}\right|^{p_2}\right)^{1/p_2},$$

pour tout $t \in [-1, 1]$.

(v) *Montrer finalement qu'il existe une constante $c = c(p_1, p_2) > 0$ telle que*

$$\left(\frac{|s|^{p_1} + |t|^{p_1}}{2}\right)^{1/p_1} \geq \left(\left|\frac{s-t}{c}\right|^{p_2} + \left|\frac{s+t}{2}\right|^{p_2}\right)^{1/p_2},$$

pour tous réels s, t.

(b) *Fixons maintenant $1 < p \leq 2$. Soient $\varepsilon > 0$ et $f, g \in L^p$ telles que $\|f\|_p \leq 1$, $\|g\|_p \leq 1$ et $\|f - g\|_p \geq \varepsilon$. En utilisant la question* (a)(v)*, montrer que*

$$\left\| \left(\left|\frac{f-g}{c}\right|^2 + \left|\frac{f+g}{2}\right|^2\right)^{1/2} \right\|_p \leq 1.$$

(c) *Montrer que, si $p \leq 2$, alors*

$$\left(\|f_1\|_p^2 + \|f_2\|_p^2\right)^{1/2} \leq \left\| \left(|f_1|^2 + |f_2|^2\right)^{1/2} \right\|_p ,$$

pour toutes fonctions $f_1, f_2 \in L^p$.

(d) *En déduire que*

$$\left\| \frac{f-g}{c} \right\|_p^2 + \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^2 \leq 1,$$

puis que L^p est uniformément convexe.

Exercice 1.11.26 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et K un espace métrique compact.*

(a) *Montrer que $C(K)$, muni de la norme du sup, est séparable*

(b) *En déduire que si $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*

Exercice 1.11.27 *Soit $E = C([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et soit $varphi_n(x) = 1 - nx$ si $x \leq 1/n$ et nulle ailleurs.*

(a) *Vérifier que E est un espace de Banach.*

(b) *Montrer que $(\varphi_n)_n$ n'a aucune sous-suite faiblement convergente.*

(c) *Que pouvez-vous en conclure sur E ?*

Exercice 1.11.28 *Soit E un espace réflexif et soit $f \in E^*$. Montrer que $\|f\|_{E^*}$ est atteinte.*

Chapitre 2

Opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert

2.1 Adjoint d'une application linéaire continue entre espaces de Hilbert

On commence avec la notion d'adjoint ; plusieurs des classes particulières d'opérateurs bornés seront définies à l'aide de cette notion.

Proposition 2.1.1 *Soient E et F des espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on ait :*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle.$$

On a de plus $\|T^*\| = \|T\|$.

Preuve : Pour tout $y \in F$ l'application $x \longmapsto \langle T(x), y \rangle$ est linéaire et continue (de norme inférieure à $\|T\|\|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique élément noté $T^*(y)$ tel que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle.$$

On vérifie facilement que pour tous $y, z \in F$ et λ scalaire, $T^*(y) + \lambda T^*(z)$ vérifie la propriété qui définit $T^*(y + \lambda z)$. Par unicité, $T^*(y) + \lambda T^*(z) = T^*(y + \lambda z)$, ce qui prouve que T^* est linéaire.

Par définition de la norme opérateur et en utilisant un corollaire d'Hahn-Banach, on a

$$\begin{aligned}\|T^*\| = \sup_{y\in F,\|y\|\le 1}\|T^*y\| &= \sup_{\substack{x\in E,\|x\|\le 1\\ y\in F,\|y\|\le 1}}|\langle x,T^*y\rangle| \\ = \sup_{\substack{x\in E,\|x\|\le 1\\ y\in F,\|y\|\le 1}}|\langle Tx,y\rangle| &= \sup_{x\in E,\|x\|\le 1}\|Tx\| = \|T\|.\end{aligned}$$

Ainsi T^* est continue et $\|T^*\| = \|T\|$.

□

Définition 2.1.2 *Soient E et F deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. L'unique application linéaire $T^* \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que pour tous $x \in E, y \in F$ on ait*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

*est appelée l'**adjoint** de T.*

Regroupons dans la proposition suivante quelques propriétés des adjoints.

Proposition 2.1.3 *Soient E et F des espaces de Hilbert. L'application $T \longmapsto T^*$ est isométrique de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(F,E)$; elle est linéaire si les espaces sont réels et antilinéaire si les espaces sont complexes. De plus, $\forall T \in \mathcal{L}(E,F)$, $(T^*)^* = T$ et $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Enfin $(TS)^* = S^*T^*$.*

Preuve : Par définition du produit scalaire et de l'adjoint, pour tous $x \in E, y \in F$, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}\langle x, (T_1+\lambda T_2)^*(y)\rangle &= \langle (T_1+\lambda T_2)(x), y\rangle \\ &= \langle T_1(x), y\rangle + \lambda\langle T_2(x), y\rangle \\ &= \langle x, (T_1)^*(y)\rangle + \langle x, \overline{\lambda}T_2^*(y)\rangle \\ &= \langle x, (T_1^* + \overline{\lambda}T_2^*)(y)\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi $T \longmapsto T^*$ est antilinéaire. Elle est isométrique d'après la proposition 2.1.1. Montrons que $(T^*)^* = T$. Pour cela on montre que pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a $\langle T(x), y\rangle = \langle (T^*)^*(x), y\rangle$. On a

$$\begin{aligned}\langle T(x), y\rangle &= \langle x, T^*(y)\rangle \\ &= \overline{\langle T^*(y), x\rangle} \\ &= \overline{\langle y, (T^*)^*(x)\rangle} \\ &= \langle (T^*)^*(x), y\rangle.\end{aligned}$$

Montrons que $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Tout d'abord on rapelle que la norme opérateur est une norme d'algèbre et donc, en particulier, $\|T^*T\| \leq \|T\|\|T^*\| = \|T\|^2$. D'autre part, en utilisant encore une fois de plus un corollaire d'Hahn-Banach et la définition de la norme opérateur, on obtient :

$$\begin{aligned}\|T^*T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|T^*T(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle T^*T(x), y\rangle| \\ &\geq \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^*T(x), x\rangle| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T(x), T(x)\rangle| \\ &= \|T\|^2.\end{aligned}$$

On a donc l'égalité $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Enfin, pour vérifier que $(TS)^* = S^*T^*$, il suffit de montrer que pour tous $x \in E$ et $y \in F$ on a $\langle (TS)^*(x), y\rangle = \langle S^*T^*(x), y\rangle$. On a, par défintion de l'adjoint,

$$\begin{aligned}\langle (TS)^*(x), y\rangle &= \langle x, (TS)(y)\rangle \\ &= \langle T^*(x), S(y)\rangle \\ &= \langle S^*T^*(x), y\rangle.\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tous vecteurs x, y, on a l'égalité $(TS)^* = S^*T^*$.

$\square$

Exemples d'opérateurs et calculs de leur adjoint

1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable admettant une base orthonormale $(h_n)_n$. Soit $\alpha = (\alpha_n)_n$ une suite bornée de nombres complexes. On définit Δ_α sur $\mathcal{H}$ par
$$\forall c = (c_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}), \Delta_\alpha \left(\sum_{n \geq 0} c_n h_n \right) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n c_n h_n.$$
L'application linéaire Δ_α est dite **diagonale** car elle admet une représentation matricielle diagonale relativement à la base $(h_n)_n$, avec $(\alpha_n)_n$ sur sa diagonale. On vérifie que Δ_α est continue, de norme $\|\alpha\|_\infty$. De plus $\Delta_\alpha^* = \Delta_{\overline{\alpha}}$, où $\overline{\alpha}$ est la suite des nombres conjugés de la suite α.
2. Soit $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mu)$ et $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Soit M_f définie par
$$M_f(g) = fg.$$
On vérifie que M_f est linéaire, continue, de norme $\|f\|_\infty$ et $M_f^* = M_{\overline{f}}$.
3. Le shift (opérateur de décalage à droite) sur $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ ou $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$ est l'application linéaire définie par
$$(S(x))_n = x_{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ ou } n \in \mathbb{Z},$$
avec la convention $x_{-1} = 0$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.
On vérifie que S est de norme 1. De plus S^* est défini par $(S^*(y))_n = y_{n+1}$. En fait $S^* = S^{-1}$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Par contre S n'est pas inversible sur $\ell^2(\mathbb{N})$, il est simplement inversible à droite avec $S^*S = Id$.

Proposition 2.1.4 *Soient E et F deux espaces de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors*
$$F = \ker(T^*) \oplus^\perp (Im(T))^- \text{ et } E = \ker(T) \oplus^\perp (Im(T^*))^-,$$
où $(Im(T))^-$ et $(Im(T^*))^-$ désignent la fermeture (pour la norme) de $Im(T)$ et $Im(T^*)$ respectivement.

Preuve : Il suffit de prouver la première assertion, la seconde s'obtenant en échangeant le rôle de T et T^*. On a les équivalences suivantes :

$$y \in \ker T^* \iff \forall x \in E, \langle T^*(y), x\rangle = 0 \iff \forall x \in E, \langle y, T(x)\rangle = 0 \iff y \perp Im(T).$$

La continuité du produit scalaire (conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), implique que

$$y \perp Im(T) \iff y \perp Im(T)^-.$$

Ainsi l'orthogonal de $\ker T^*$ est l'adhérence de l'image de T.

□

Donnons également une propriété simple mais utile concernant les sous-espaces invariants.

Proposition 2.1.5 *Soient E un espace de Hilbert, G un sous-espace de E et soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors $TG \subset G$ si et seulement si $T^*G^\perp \subset G^\perp$.*

Preuve : Supposons d'abord que $TG \subset G$ et montrons que $T^*G^\perp \subset G^\perp$. Soit $x \in G$ et $y \in G^\perp$. Alors

$$\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle = 0,$$

car $Tx \in G$. Ainsi $T^*y \perp x$, pour tout $x \in G$, ce qui montre que $T^*y \in G^\perp$.

Pour la réciproque, on peut appliquer le sens qu'on vient de démontrer à T^* et $G^\perp$.

□

2.2 Opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, autoadjoints

Définition 2.2.1 *Soient E et F deux espaces de Hilbert. Lorsque $E = F$, $\mathcal{L}(E, F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.*

1. *Un élément $U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé* ***unitaire*** *si $U^*U = Id_E$ et $UU^* = Id_F$.*

2. *Un élément $U \in \mathcal{L}(E,F)$ est appelé* ***isométrique*** *si $\|U(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.*
3. *Un élément $N \in \mathcal{L}(E)$ est appelé* ***normal*** *si $NN^* = N^*N$.*
4. *Un élément $S \in \mathcal{L}(E)$ est appelé* ***hermitien*** *ou* ***auto-adjoint*** *si $S = S^*$.*
5. *Un élément $P \in \mathcal{L}(E)$ est appelé* ***positif*** *(notation : $P \geq 0$) si P est autoadjoint et si pour tout $x \in E$ $\langle P(x), x\rangle \geq 0$.*

Remarque 2.2.2 *On verra (voir Exercice 2.4.2) que dans le cas d'un espace de Hilbert H complexe, un opérateur $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est positif si et seulement si $\langle Px, x\rangle \geq 0$, pour tout $x \in H$. Autrement dit, la condition P auto-adjoint dans la définition est superflue si on travaille avec un espace de Hilbert complexe. Mais attention, cela n'est pas le cas si l'espace de Hilbert est réel !*

Exemples d'opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, autoadjoints

1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un **projecteur orthogonal**. Notons F son image. Alors P est auto-adjoint. En effet, pour tous $x, x' \in F$ et $y, y' \in F^\perp$,
$$\langle P(x+y), x'+y'\rangle = \langle x, x'\rangle = \langle x+y, P(x'+y')\rangle.$$
De plus $\langle P(x+y), x+y\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 \geq 0$ pour tous $x \in F$ et $y \in F^\perp$. Ainsi $P \geq 0$.
2. Les opérateurs diagonaux Δ_α et M_f définis précédemment sont normaux. En effet
$$\Delta_\alpha \Delta_\alpha^* = \Delta_\alpha \Delta_{\overline{\alpha}} = \Delta_\beta = \Delta_{\overline{\alpha}} \Delta_\alpha = \Delta_\alpha^* \Delta_\alpha,$$
où $\beta = (\beta_n)_n$ est la suite définie par $\beta_n = |\alpha_n|^2$. D'autre part,
$$M_f M_f^* = M_f M_{\overline{f}} = M_{|f|^2} = M_f^* M_f.$$

3. Le shift S sur $\ell^2(\mathbb{N})$ est isométrique, le shift S sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ est unitaire.

4. Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $T^*T \in \mathcal{L}(E)$ est hermitien car $(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T$ d'après la proposition 2.1.3. De plus $T^*T \geq 0$ car, pour tout $x \in E$, $\langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$. En particulier $A^2 \geq 0$ dès que $A = A^*$.

Proposition 2.2.3 *Soient E et F deux espaces de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Sont équivalents :*

1. *T est isométrique.*
2. *$T^*T = Id_E$.*

Sont équivalents :

1. *T est unitaire.*
2. *T est surjective et $T^*T = Id_E$.*
3. *T est une isométrie surjective.*

Preuve : Montrons la première équivalence. Supposons que T est isométrique. Montrer que $T^*T = Id_E$ revient à montrer que pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle T^*T(x), y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Rappelons l'identité de polarisation, à savoir,

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle + i\langle u+iv, u+iv\rangle - i\langle u-iv, u-iv\rangle),$$

pour un Hilbert complexe et

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle),$$

pour un Hilbert réel. En utilisant l'une ou l'autre de ces identités et le fait que $\|T(u)\| = \|u\|$, on en déduit :

$$\langle T^*T(x), y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Réciproquement, supposons que $T^*T = Id_E$. Ceci implique que pour tout $x \in E$,

$$\langle T^*T(x), x\rangle = \langle x, x\rangle.$$

On en déduit immédiatement pour tout $x \in E$,

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2,$$

ce qui prouve que T est bien isométrique.
Pour la preuve des trois autres équivalences, les implications 1. implique 2. et 2. implique 3. sont évidentes. Pour montrer que 3. implique 1., on remarque qu'une isométrie linéaire est injective et donc les hypothèses de 3. impliquent que T^{-1} existe. De plus, T étant une isométrie, on a $T^*T = Id_E$. En composant à droite par T^{-1}, on obtient $T^* = T^{-1}$.

□

Donnons un lemme élémentaire mais utile sur les opérateurs normaux.

Lemme 2.2.4 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur normal. Alors* $\ker T = \ker T^*$.

Preuve : Soit $x \in \ker T$. Alors

$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = 0,$$

en utilisant pour la troisième égalité le fait que T est normal donc $TT^* = T^*T$. Ceci prouve donc que $\ker T \subset \ker T^*$. Maintenant remarquons que si T est normal, alors T^* est normal et en appliquant l'inclusion qu'on vient de démontrer à T^*, on obtient $\ker T^* \subset \ker T^{**} = \ker T$, car $T^{**} = T$. Finalement $\ker T = \ker T^*$.

□

2.3 Spectre des applications linéaires et continues

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On définit le *spectre* de T comme l'ensemble

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\},$$

l'*ensemble résolvant* de T comme $\mathcal{R}(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ et enfin la *résolvante* de T comme l'opérateur

$$R_\lambda(T) := (T - \lambda I)^{-1}, \qquad \lambda \in \mathcal{R}(T).$$

Nous allons tout d'abord établir la nature topologique du spectre.

Théorème 2.3.1 *Le spectre de tout opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons utiliser deux lemmes importants par ailleurs.

Lemme 2.3.2 (Identité de la résolvante) *Pour $\lambda, \lambda_0 \in \mathcal{R}(T)$, on a*

$$R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T) = (\lambda - \lambda_0) R_\lambda(T) R_{\lambda_0}(T).$$

Preuve : En utilisant le fait que $T - \lambda I$ et $T - \lambda_0 I$ commutent, on a

$$\begin{aligned}(R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T))(T - \lambda_0 I)(T - \lambda I) =& R_\lambda(T)(T - \lambda I)(T - \lambda_0 I) - R_{\lambda_0}(T)(T - \lambda_0 I)(T - \lambda I)\\ =& T - \lambda_0 I - (T - \lambda I)\\ =& (\lambda - \lambda_0) I.\end{aligned}$$

En composant à droite par $R_\lambda(T) R_{\lambda_0}(T)$, on obtient le résultat.

□

Lemme 2.3.3 *Notons $Inv(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

(a) *Si $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\|U\| < 1$, alors on a $I - U \in Inv(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ et*

$$(I - U)^{-1} = \sum_{n \geq 0} U^n.$$

(b) *$Inv(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ est un ouvert de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

(c) *L'application $\mathcal{J} : Inv(\mathcal{L}(\mathcal{H})) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{J}(A) := A^{-1}$, est continue.*

Preuve : (a) : comme $\|U\| < 1$, la série $\sum_n U^n$ est normalement convergente dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ qui est un espace de Banach donc elle converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. De plus, on vérifie facilement que

$$(I-U)\left(\sum_{n=0}^{N} U^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{N} u^n\right)(I-U) = I - U^{N+1},$$

et donc par passage à la limite (comme $\|U^{N+1}\| \leq \|U\|^{N+1} \to 0$, $N \to +\infty$), on en déduit que

$$(I-U)\left(\sum_{n\geq 0} U^n\right) = \left(\sum_{n\geq 0} U^n\right)(I-U) = I,$$

ce qui achève de prouver (a).

Pour démontrer (b), il suffit de remarquer que si $A \in \operatorname{Inv}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, alors la boule ouverte centrée en A et de rayon $1/\|A^{-1}\|$ est contenue dans $\operatorname{Inv}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$. En effet, si $T \in B(A, 1/\|A^{-1}\|)$, on a

$$T = A + (T-A) = A\left(I + A^{-1}(T-A)\right).$$

Remarquons alors que $\|A^{-1}(T-A)\| \leq \|A^{-1}\|\|T-A\| < 1$. Donc d'après (a), on a $I + A^{-1}(T-A)$ inversible et comme $\operatorname{Inv}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ est un groupe, on en déduit que T est inversible.

Pour montrer (c), fixons $A \in \operatorname{Inv}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq \|A^{-1}\|$. Nous allons montrer que si $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est tel que $\|B\| \leq \varepsilon/(2\|A^{-1}\|^2)$, alors on a $\|\mathcal{J}(A) - \mathcal{J}(A+B)\| \leq \varepsilon$, ce qui assurera que $\mathcal{J}$ est continue. Tout d'abord remarquons que $A + B = (I + BA^{-1})A$ et $\|BA^{-1}\| \leq \|B\|\|A^{-1}\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|A^{-1}\|} \leq 1/2 < 1$. Donc en utilisant (a), on obtient que $A + B \in \operatorname{Inv}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ et

$$(A+B)^{-1} = A^{-1}(I + BA^{-1})^{-1} = A^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n (BA^{-1})^n.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{J}(A)-\mathcal{J}(A+B)\| &= \|A^{-1}-(A+B)^{-1}\| = \|A^{-1}(I-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(BA^{-1})^n)\| \\
&= \|A^{-1}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(BA^{-1})^n\| \\
&\leq \|A^{-1}\|\sum_{n=1}^{+\infty}\|BA^{-1}\|^n = \|A^{-1}\|\frac{\|BA^{-1}\|}{1-\|BA^{-1}\|} \\
&\leq \|A^{-1}\|\frac{\frac{\varepsilon}{2\|A^{-1}\|}}{1-\frac{\varepsilon}{2\|A^{-1}\|}} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

Preuve du théorème 2.3.1 : le spectre de T est borné car si $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $|\lambda| > \|T\|$, alors $T - \lambda Id$ est inversible d'après le lemme 2.3.3. D'où $\sigma(T) \subset \overline{D(0, \|T\|)}$.

Pour montrer que $\sigma(T)$ est fermé, considérons l'application $f : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ définie par $f(\lambda) = \lambda Id - T$. Alors f est continue et $\mathcal{R}(T) = f^{-1}(Inv(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Ainsi $\mathcal{R}(T)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. Nous pouvons en conclure que $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$.

Vérifions que $\sigma(T)$ est non vide. Pour cela nous allons utiliser la théorie des fonctions analytiques à valeurs vectorielles (voir appendice). Considérons $g : \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ définie par $g(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$. Remarquons tout d'abord que d'après le lemme 2.3.3 (c), la fonction g est continue sur $\mathcal{R}(T)$. De plus, d'après le lemme 2.3.2, pour $\lambda_0 \in \mathcal{R}(T)$ et λ proche de λ_0, on a

$$\frac{g(\lambda)-g(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} = g(\lambda)g(\lambda_0),$$

Donc par continuité de g, on obtient que

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{g(\lambda)-g(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} = g(\lambda_0)^2.$$

Ainsi g est holomorphe sur $\mathcal{R}(T)$ et on a $g'(\lambda_0) = g(\lambda_0)^2$. Supposons maintenant que $\sigma(T) = \emptyset$. Autrement dit, cela implique que $\mathcal{R}(T) = \mathbb{C}$. Ainsi g est une fonction entière. Montrons que g est bornée. Pour cela remarquons que pour $|\lambda| > \|T\|$, on a (toujours d'après le lemme 2.3.3)

$$\|g(\lambda)\| = \|(T-\lambda I)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|}\|(I-\frac{1}{\lambda}T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|-\|T\|}.$$

Ainsi cela prouve que $\lim_{|\lambda|\to+\infty} g(\lambda) = 0$. Par conséquent g est bornée. Le théorème de Liouville pour les fonctions analytiques à valeurs vectorielles (voir théorème B.3.9) implique que g est constante. Comme g tend vers 0 en l'infini, on en déduit que $g \equiv 0$, ce qui est absurde !

$\square$

Nous allons à présent établir le théorème spectral suivant.

Théorème 2.3.4 *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

1. *Si T est inversible, alors $\sigma(T^{-1}) = \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$.*
2. *$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$ pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$.*

Preuve : 1. Soit $\lambda \in \sigma(T^{-1})$. Comme T^{-1} est inversible, nécessairement $\lambda \neq 0$. Comme $T^{-1} - \lambda Id$ est non inversible et comme $T^{-1} - \lambda Id = \lambda T^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}Id - T\right)^{-1}$, l'opérateur $\left(\frac{1}{\lambda}Id - T\right)^{-1}$ est non inversible, i.e. $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T)$. On a donc montré que $\sigma(T^{-1}) \subset \sigma(T)^{-1} := \{1/\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$. En échangeant le rôle de T et T^{-1} on obtient l'inclusion réciproque $\sigma(T)^{-1} \subset \sigma(T^{-1})$, ce qui achève la preuve de la première assertion.
2. Montrons tout d'abord que $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$. Soit $\lambda \in \sigma(T)$. Comme le polynôme $p(X)-p(\lambda)$ s'annule en λ, il existe un polynôme q tel que $p(X)-p(\lambda) = (X-\lambda)q(X)$, ce qui donne

$$p(T) - p(\lambda)Id = (T - \lambda Id)q(T).$$

Si $p(T) - p(\lambda)Id$ était inversible, $(T - \lambda Id)$ serait aussi inversible, d'inverse $(p(T) - p(\lambda)Id)^{-1}q(T)$, ce qui est contraire aux hypothèses. On obtient donc que $p(\lambda) \in \sigma(p(T))$, montrant que $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$.

Montrons ensuite que $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$. Si p est constant, l'inclusion est trivialement vérifiée. On suppose donc dans la suite que p n'est pas un polynôme constant. Soit $\lambda \in \sigma(p(T))$. On factorise dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $p(X) - \lambda$ sous la forme :

$$p(X) - \lambda = \alpha(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n),$$

où les α_i, $i = 1, \cdots, n$ désignent les racines de $p(X) - \lambda$, et où $\alpha \neq 0$ car p n'est pas constant. Si pour tout $i = 1, \cdots, n$ l'opérateur $T - \alpha_i Id$ est inversible, $p(T) - \lambda Id$ est aussi inversible, ce qui est absurde. Par conséquent il existe un indice $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $T - \alpha_i Id$ est non inversible, i.e. $\alpha_i \in \sigma(T)$. On en déduit que $\lambda = p(\alpha_i) \in p(\sigma(T))$, prouvant que $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$.

$\square$

Le dernier résultat que nous allons établir concerne le calcul explicite du module du plus grand élément du spectre, appeleé le **rayon spectral**.

Théorème 2.3.5 *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et notons*

$$\rho(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Alors $\sigma(T) \subset \overline{D}(0, \rho(T))$. De plus, on a aussi

$$\rho(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Preuve : Notons $\alpha := \liminf_{n\geq 1} \|T^n\|^{1/n}$. Soit $\lambda \in \sigma(T)$. D'après la seconde assertion du Théorème 2.3.4, $\lambda^n \in \sigma(T^n)$. Ainsi $|\lambda^n| \leq \|T^n\|$, ce qui implique $|\lambda| \leq \|T^n\|^{1/n}$. Ainsi $\rho(T) \leq \alpha$. De plus

$$\alpha \leq \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \rho(T).$$

Pour cela nous allons utiliser la théorie des fonctions holomorphes et des séries entières. Notons Ω le disque ouvert centré en 0 et de rayon $\frac{1}{\rho(T)}$, avec la convention

$\Omega = \mathbb{C}$ si $\rho(T) = 0$. Considérons la fonction $f : \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ définie par $f(0) = 0$ et $f(\lambda) = \left(T - \frac{1}{\lambda} Id\right)^{-1}$ pour tout $\lambda \in \Omega \setminus \{0\}$. La fonction f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{0\}$ et nous avons déjà remarqué dans la preuve du Théorème 2.3.1 que $\lim_{\lambda \to 0} f(\lambda) = 0$. La fonction f est donc continue sur Ω, ce qui implique que f est en fait holomorphe sur Ω. De plus, si $0 < |\lambda| < \frac{1}{\|T\|}$, on a

$$f(\lambda) = -\lambda(Id - \lambda T)^{-1} = -\sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} T^n,$$

égalité qui reste trivialement vraie pour $\lambda = 0$. Par conséquent, si $|\lambda| < \frac{1}{\|T\|}$, $f(\lambda) = -\sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} T^n$. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} T^n$. Comme f est holomorphe sur Ω, $R \geq dist(0, \Omega^c) = \frac{1}{\rho(T)}$ (voir théorème B.3.7). De plus, d'après la formule d'Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Finalement $\limsup_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \rho(T)$, ce qui achève la preuve du théorème.

$\square$

2.4 Exercices, compléments de cours

Exercice 2.4.1 (théorème de Hellinger-Toeplitz) *Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ une application linéaire.*

1. *On suppose qu'il existe une application linéaire $U : H \to H$ telle que*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, U(y) \rangle,$$

pour tous $(x, y) \in H \times H$. En déduire que T et U sont continues et $U = T^*$.

2. *On suppose maintenant que pour tous $x, y \in H$:*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle.$$

Montrer que T est un opérateur autoadjoint.

Exercice 2.4.2 *Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $T \in \mathcal{L}(H)$.*

1. *Montrer que si pour tout $x \in H$ on a $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$, alors T est auto-adjoint.*
2. *En déduire que si $P \in \mathcal{L}(H)$, alors P est positif si et seulement si pour tout $x \in H$ on a $\langle P(x), x\rangle \geq 0$.*

Exercice 2.4.3 *Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que $T = 0$ si et seulement si $\langle T(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in H$.*
Montrer que ce résultat est faux sur un espace de Hilbert réel.

Exercice 2.4.4 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur autoadjoint. Montrer que*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T(x), x\rangle|.$$

Indication : considérer $\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle$.
Que peut-on en déduire (voir exercice 2.4.3) ?

Exercice 2.4.5 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est normal.*
2. *pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle T^*(x), T^*(y)\rangle$.*
3. *pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$.*

Exercice 2.4.6 *Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ la base orthonormale canonique de $\ell^2(\mathbb{N})$. Soit S l'opérateur défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par*

$$S(e_n) = e_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On appelle S le ***shift unilatéral****.*

1. *Déterminer le spectre de S^*.*
2. *Montrer que le spectre de S est le disque unité fermé.*

3. *Est-ce que* S *possède des valeurs propres ?*

Exercice 2.4.7 *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert et soit* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *un opérateur* ***normal****, c'est-à-dire vérifiant* $T^*T = TT^*$.

1. *Montrer que* $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$, *pour tout* $n \geq 0$.
2. *En déduire que le rayon spectral de* T *est égal à* $\|T\|$.
3. *En déduire qu'il existe* $\lambda \in \sigma(T)$ *tel que* $|\lambda| = \|T\|$.
4. *Montrer que si le spectre de* T *est réduit à* $\{0\}$, *alors* T *est identiquement nul.*

Chapitre 3

Opérateurs compacts

3.1 Applications linéaires compactes

Si E est un espace vectoriel normé, on note $B_E(0,r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$ et $\overline{B}_E(0,r)$ la boule fermée. Dans le cas où $r = 1$, on note pour simplifier $B_E = B_E(0,1)$ et $\overline{B}_E = \overline{B}_E(0,1)$. S'il n'y a pas d'ambiguité possible, on oubliera parfois de préciser que la boule que la boule est dans E, en notant simplement $B(0,r)$ ou $\overline{B}(0,r)$.

Définition 3.1.1 *Soient E et F deux espaces de Banach. Une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est dite* ***compacte*** *si l'image $T(\overline{B}_E)$ est une partie relativement compacte de F. On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F. On pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E,E)$.*

Commençons par une proposition simple mais utile.

Proposition 3.1.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est compact.*

(ii) *pour toute partie A bornée de E, l'ensemble $T(\bar{A})$ est relativement compact dans F.*

Preuve : (ii) $\Longrightarrow$ (i) : on applique (ii) à $A = B_E$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : soit A une partie bornée quelconque de E. Par définition, il existe donc $r > 0$ tel que $A \subset B_E(0, r) = rB_E$. D'où, avec la linéarité de T, on obtient que

$$T(\bar{A}) \subset T(r\overline{B}_E) = rT(\overline{B}_E).$$

Comme $T(\overline{B}_E)$ est relativement compact, on vérifie alors facilement que $rT(\overline{B}_E)$ est relativement compact et donc $T(\bar{A})$ est aussi relativement compact.

□

La proposition suivante décrit la structure de $\mathcal{K}(E, F)$.

Proposition 3.1.3 *Soient E et F deux espaces de Banach ; l'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$. Soient E, F et G des espaces de Banach, $S \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(F, G)$; si S ou T est compacte alors TS est compacte. En particulier, $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.*

Preuve : Il est clair que si $T \in \mathcal{K}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda T \in \mathcal{K}(E, F)$. Soient maintenant T_1 et T_2 deux applications linéaires compactes de E dans F, et considérons les ensembles $A_1 = T_1(\overline{B}_E), A_2 = T_2(\overline{B}_E)$ et $A = (T_1 + T_2)(\overline{B}_E)$; il est clair que A est contenu dans $A_1 + A_2$. Comme A_1 et A_2 sont relativement compacts, la proposition 1.2.21 implique que $A_1 + A_2$ est relativement compact. Donc A est aussi relativement compacte (en vertu du théorème 1.2.4). Ainsi $T_1 + T_2 \in \mathcal{K}(E, F)$. Ceci montre que $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

Supposons que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ soit adhérent à $\mathcal{K}(E, F)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un opérateur compact $S \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\|T - S\| < \varepsilon$; il en résulte que tout point de $T(\overline{B}_E)$ est approché à ε près par un point du compact $K = \overline{S(\overline{B}_E)}$. Le corollaire 1.2.19 implique alors que T est compact.

Montrons pour finir les propriétés de composition. Supposons $S \in \mathcal{L}(E, F)$ compacte. On a

$$T(S(\overline{B}_E)) \subset T(\overline{S(\overline{B}_E)}).$$

Par compacité de S et continuité de T, l'ensemble $T(\overline{S(\overline{B}_E)})$ est compact et donc $T(S(\bar{B}_E))$ est relativement compacte, c'est-à-dire que TS est compact.

Supposons maintenant que $T \in \mathcal{L}(F, G)$ est compact et montrons que TS est aussi compact. On a

$$TS(\overline{B}_E) \subset T(\overline{S(\overline{B}_E)}).$$

Comme S est continue, l'ensemble $S(\overline{B}_E)$ est borné et la proposition 3.1.2 entraîne que $T(\overline{S(\overline{B}_E)})$ est relativement compact et donc $TS(\overline{B}_E)$ est relativement compact. Ainsi TS est compact.

$\square$

Remarque 3.1.4 *Il est clair que tout opérateur T de rang fini est compact : en effet, l'ensemble $T(\overline{B}_E)$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie. D'après le résultat précédent, si une suite $(T_n)_n$ d'opérateurs de rang fini dans $\mathcal{L}(E, F)$ converge vers T dans $\mathcal{L}(E, F)$, alors T est compact. C'est une méthode assez efficace pour vérifier que certains opérateurs sont compacts.*

Proposition 3.1.5 *Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Si une suite $(x_n)_n$ de points de E converge faiblement vers 0, alors la suite $(T(x_n))_n$ converge en norme vers 0.*

Preuve : Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge faiblement vers 0. En utilisant le théorème de Banach–Steinhauss, on en déduit que la suite $(x_n)_n$ est bornée (voir (c) de la proposition 1.3.4). Donc elle est contenue dans une boule $\overline{B}_E(0, r)$, $r > 0$. D'après la proposition 3.1.2, l'ensemble $T(\overline{B}_E(0, r))$ est relativement compacte dans F donc contenu dans un compact K de F (par exemple, on peut prendre $K = \overline{T(\overline{B}_E(0, r))}\,!$). D'après le lemme 1.2.8, la topologie faible $\sigma(F, F^*)$ et la topologie de la norme coincide sur K. Or d'après le lemme 1.3.9, l'application

$$T : (\overline{B}_E(0, r), \sigma(E, E^*)) \longrightarrow (K, \sigma(F, F^*))$$

est continue. Ainsi on en déduit que l'application

$$T : (\overline{B}_E(0,r), \sigma(E,E^*)) \longrightarrow (K, \|\cdot\|)$$

est continue. En particulier, comme $(x_n)_n$ converge faiblement vers 0 dans $\overline{B}_E(0,r)$, la suite $(Tx_n)_n$ converge vers 0 dans F pour la topologie de la norme.

□

Théorème 3.1.6 *Soit E un espace de Banach. Pour $T \in \mathcal{L}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $T \in \mathcal{K}(E)$ *;*
2. $T^* \in \mathcal{K}(E^*)$.

Tout d'abord, rappelons que T^* est défini grâce à la relation suivante :

$$\langle T^*x^*, x\rangle = \langle x^*, Tx\rangle,$$

pour tout $x^* \in E^*$ et $x \in E$. Ainsi

$$\|T^*x^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^*x^*, x\rangle| = \sup_{\|x\|\leq 1} ||\langle x^*, Tx\rangle|,$$

avec $|\langle x^*, Tx\rangle| \leq \|x^*\|\|Tx\| \leq \|x^*\|\|T\|\|x\|$. Ainsi, nous avons

$$\|T^*x^*\| \leq \|T\|\|x^*\|,$$

ce qui prouve en particulier la continuité de T^* comme application linéaire de E^* dans E^*. De plus, on a $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Preuve : Supposons que $T \in \mathcal{K}(E)$ et montrons que $T^* \in \mathcal{K}(E^*)$. Soit $(y_n^*)_{n\geq 1}$ une suite de la boule unité fermée de E^*. D'après le corollaire 1.2.18, nous devons montrer que $(T^*y_n^*)_n$ possède une sous-suite convergente (pour la topologie de la norme dans E^*). D'après le théorème de Banach–Alaoglu et le théorème 1.2.13, on sait que $(y_n^*)_n$ possède une valeur d'adhérence $y^* \in \overline{B}_{E^*}$ pour la topologie faible*. Montrons que T^*y^* est une valeur d'adhérence de $(T^*y_n^*)_n$ pour la topologie de la norme dans E^*. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $T(\overline{B}_E)$ est relativement compact donc précompact d'après le théorème 1.2.18, il existe $y_1, y_2, \ldots, y_m \in E$ tels que

$$T(\overline{B}_E) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_E(y_i, \varepsilon/6).$$

L'ensemble

$$V = \{\varphi \in E^* : |\langle y_i, \varphi - y^* \rangle| < \varepsilon/6,\, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

est un voisinage de y^* pour la topologie faible*. Donc (par définition d'une valeur d'adhérence), l'ensemble $I := \{n \in \mathbb{N} : y_n^* \in V\}$ est infini. Soit maintenant $x \in \overline{B}_E$ quelconque. Alors il existe $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tel que $\|Tx - y_i\| < \frac{\varepsilon}{6}$. Donc pour $n \in I$, on a

$$\begin{aligned}
|\langle x, T^*y_n^* - T^*y^* \rangle| =& |\langle Tx, y_n^* - y^* \rangle| \\
\leq& |\langle Tx - y_i, y_n^* - y^* \rangle| + |\langle y_i, y_n^* - y^* \rangle| \\
\leq& \|Tx - y_i\| \|y_n^* - y^*\| + |\langle y_i, y_n^* - y^* \rangle| \\
\leq& 2\frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|T^*y_n^* - T^*y^*\| = \sup_{x \in \overline{B}_E} |\langle x, T^*y_n^* - T^*y^* \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ainsi, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : T^*y_n^* \in B_{E^*}(T^*y^*, \varepsilon)\}$ contient I donc est infini. Ceci prouve bien que T^*y^* est une valeur d'adhérence de la suite $(T^*y_n^*)_n$ pour la topologie de la norme dans E^*. Le lemme 1.2.12 permet alors de conclure qu'il existe une sous-suite $(T^*y_{n_k}^*)_k$ qui converge vers T^*y^*.

Réciproquement, supposons que T^* soit compact. D'après la première partie de la preuve, on en déduit que $T^{**} : E^{**} \longrightarrow E^{**}$ est compact. Plongeons E isométriquement dans E^{**} à l'aide de l'injection canonique

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{J} : & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & \mathcal{J}(x), \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{rccc} \mathcal{J}(x) : & E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \varphi & \longmapsto & \mathcal{J}(x)(\varphi) = \langle x, \varphi \rangle. \end{array}$$

On a alors $T^{**} \circ \mathcal{J} = \mathcal{J} \circ T$. D'où, en utilisant que $\mathcal{J}$ est une isométrie,

$$\mathcal{J}\left(\overline{T(\overline{B}_E)}\right) = \overline{\mathcal{J}(T(\overline{B}_E))} = \overline{T^{**}(\mathcal{J}(\overline{B}_E))} \subset \overline{T^{**}(\overline{B}_{E^{**}})}.$$

Comme T^{**} est compact, l'ensemble $\overline{T^{**}(\overline{B}_{E^{**}})}$ est compact et donc $\mathcal{J}\left(\overline{T(\overline{B}_E)}\right)$ est compact (car fermé dans un compact). En utilisant encore une fois que $\mathcal{J}$ est une isométrie, on en déduit que $\overline{T(\overline{B}_E)}$ est un compact de E (voir proposition 1.2.6), c'est-à-dire que $T \in \mathcal{K}(E)$.

□

Dans le cadre hilbertien, on peut donner des caractérisations plus précises de la compacité.

Théorème 3.1.7 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *l'opérateur T est adhérent (en norme d'opérateur) à l'espace des applications linéaires continues de rang fini ;*

(b) *l'opérateur T est compact de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$;*

(c) *l'ensemble $T(\overline{B}_{\mathcal{H}})$ est compact (en norme) dans $\mathcal{H}$;*

(d) *pour toute suite (x_n) de points de $\mathcal{H}$ convergeant faiblement vers 0, la suite $(T(x_n))_n$ converge en norme vers 0 ;*

(e) *pour tout système orthonormal $(e_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{H}$ on $\lim_{n\to\infty} \|T(e_n)\| = 0$.*

Preuve :

Nous allons raisonner selon le schéma suivant :

(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (b), puis (b) $\Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow$ (e) $\Longrightarrow$ (a).

(a) $\Longrightarrow$ (b) : découle de remarque 3.1.4.

(b) $\Longrightarrow$ (c) : on sait déjà que, par définition de la compacité d'un opérateur, l'ensemble $T(\overline{B}_{\mathcal{H}})$ est relativement compact dans $\mathcal{H}$. Il reste donc à montrer qu'il est fermé. Soit donc $(x_n)_n$ une suite de $\overline{B}_{\mathcal{H}}$ telle que $(Tx_n)_n$ converge (en norme) vers $y \in \mathcal{H}$. Il s'agit de montrer que $y \in T(\overline{B}_{\mathcal{H}})$. Comme $(x_n)_n$ est bornée, il existe d'après le corollaire 1.7.6 une sous-suite $(x_{n_k})_k$ faiblement convergente, disons vers x. De plus, théorème 1.3.8 assure que $\overline{B}_{\mathcal{H}}$ est faiblement fermée donc

$x \in \overline{B}_{\mathcal{H}}$. D'après la proposition 3.1.5, la suite $(Tx_{n_k})_k$ converge en norme vers Tx et par unicité de la limite, on en déduit alors que $y = Tx \in T(\overline{B}_{\mathcal{H}})$.

(c) $\Longrightarrow$ (b) : est évident !

(b) $\Longrightarrow$ (d) : résulte de la proposition 3.1.5.

(d) $\Longrightarrow$ (e) : il suffit de remarquer que si $(e_n)_n$ est un système orthonormal, alors $(e_n)_n$ converge faiblement vers 0. En effet, pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a

$$\sum_n |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty,$$

et donc en particulier $\langle x, e_n\rangle \to 0$, $n \to +\infty$, pour tout $x \in \mathcal{H}$.

(e) $\Longrightarrow$ (a) : notons $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ l'espace des applications linéaires (continues) de rang fini. On raisonne par l'absurde en supposant que T n'est pas adhérent à $\mathcal{R}(\mathcal{H})$. Il existe alors un voisinage de T, disons $B_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}(T, 2\varepsilon) = \{U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \|U - T\| < 2\varepsilon\}$, qui ne rencontre pas $\mathcal{R}(\mathcal{H})$. Cela implique alors

$$\|R - T\| > \varepsilon, \qquad \forall R \in \mathcal{R}(\mathcal{H}). \tag{3.1}$$

On va construire par récurrence un système orthonormal $(e_n)_{n\geq 0}$ tel que $\|Te_n\| > \varepsilon$. En appliquant (3.1) avec $R = 0$, on obtient $\|T\| > \varepsilon$. Ainsi il existe $e_0 \in E$, $\|e_0\| = 1$ tel que $\|Te_0\| > \varepsilon$. Supposons e_k construit pour $k < n$ et soit P la projection orthogonal sur le sous-espace F de E engendré par $\{e_k : k < n\}$. Alors TP est un opérateur de rang fini donc avec (3.1), on a $\|T - TP\| > \varepsilon$. Il existe ainsi $y_n \in E$, $\|y_n\| = 1$ tel que

$$\|T(Id_E - P)y_n\| > \varepsilon. \tag{3.2}$$

Or $Id_E - P$ est une projection orthogonale, donc de norme inférieure ou égale à 1, et donc on a $\|(Id_E - P)y_n\| \leq \|y_n\| = 1$. D'où

$$\|T(Id_E - P)y_n\| > \varepsilon\|(Id_E - P)y_n\|.$$

Posons alors $z_n = (Id_E - P)y_n$ puis $e_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$ (remarquons que $z_n \neq 0$ d'après (3.2)). D'où finalement

$$\|Te_n\| = \|z_n\|^{-1}\|Tz_n\| = \frac{\|T(Id_E - P)y_n\|}{\|(Id_E - P)y_n\|} > \varepsilon.$$

On a aussi $\|e_n\| = 1$ et $e_n \perp e_k$, $k < n$, car $e_n \in \mathrm{Im}(Id_E - P) = (\mathrm{Im}\ P)^\perp = F^\perp$. Ainsi par récurrence, on construit un système orthonormal $(e_n)_n$ tel que $\|Te_n\| > \varepsilon$, ce qui est en contradiction avec (e).

$\square$

3.2 Théorie spectrale des opérateurs compacts

Cette théorie est pour l'essentiel la création du mathématicien hongrois F. Riesz, aux alentours de 1910. Le théorème de Riesz (qui affirme que si E est un espace vectoriel normé, alors $\overline{B_E}$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie) est l'un des points clés de cette théorie.

Lemme 3.2.1 *Soit $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact et $T = Id_E - K$. Supposons qu'il existe un sous-espace fermé F de E tel que T soit injectif de F dans E. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in F$. En particulier, l'image $T(F)$ est fermée.*

Preuve : Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il n'existe pas de constante $c > 0$ telle que $\|Tx\| \geq c\|x\|$, $x \in F$. On peut alors trouver une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de vecteurs de F, de norme 1, telle que $\|Tx_n\| \to 0$, $n \to +\infty$. Puisque K est compact, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que $K(x_{n_k})$ converge ; mais $T(x_{n_k}) = x_{n_k} - K(x_{n_k})$ tend vers 0, donc x_{n_k} converge vers un vecteur $x \in E$. Comme F est fermé, nécessairement, $x \in F$ et de plus, $\|x\| = 1$. Donc en particulier $x \neq 0$. Il reste alors à remarquer que par continuité de T, on a

$$Tx = \lim_{k\to+\infty} Tx_{n_k} = 0,$$

ce qui contredit l'injectivité de T sur F. Ainsi il existe une constante $c > 0$ telle que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in F$. Le fait que l'image $T(F)$ soit fermée résulte d'arguments standards laissés en exercice au lecteur.

$\square$

Proposition 3.2.2 *Soit E un espace de Banach, $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact et $T = Id_E - K$. Alors le noyau de T est de dimension finie et l'image $T(E)$ est fermée.*

Remarque 3.2.3 *On remarquera, en utilisant la formule du binôme et la propriété d'idéal de $K(E)$, que $T^n = (Id_E - K)^n$ est de la forme $Id_E - K_n$, avec K_n compact, donc les images de T^n sont fermées pour tout $n \geq 0$ (et leurs noyaux sont de dimension finie).*

Preuve de la proposition 3.2.2 : Notons $E_1 = \ker T = \ker(Id_E - K)$. On vérifie facilement que $\overline{B}_{E_1} \subset K(\overline{B}_E)$ et comme K est compact, on obtient que $\overline{B}_{E_1}$ est compact. Le théorème de Riesz implique alors que E_1 est de dimension finie. Le lemme 1.10.5 implique alors qu'il existe un sous-espace fermé F de E tel que $E = ker(T) \oplus F$. Alors T est injectif sur F et le lemme 3.2.1 entraîne que $T(E) = T(F)$ est fermée.

□

Lemme 3.2.4 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, avec F fermé, $F \subset G$ et $F \neq G$. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe un vecteur $y \in G$ tel que $\|y\| = 1$ et $\mathrm{dist}(y, F) > 1 - \varepsilon$.*

Preuve : Par hypothèse, il existe $y_0 \in G \setminus F$. Puisque F est fermé et $y_0 \notin F$, on a $\delta := \mathrm{dist}(y_0, F) > 0$. Comme $\mathrm{dist}(y_0, F) < \delta/(1 - \varepsilon)$, il existe $x_0 \in F$ tel que $\|x_0 - y_0\| < \delta/(1 - \varepsilon)$. Notons $\alpha = \|x_0 - y_0\|$ et posons $y = \alpha^{-1}(y_0 - x_0)$ (remarquons que $\alpha \neq 0$ car $y_0 \notin F$). Montrons que y convient. Tout d'abord, bien sûr, on a $y \in G$ et $\|y\| = 1$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}(y, F) =& \mathrm{dist}(\alpha^{-1}(y_0 - x_0), F)\\
=& \alpha^{-1}\mathrm{dist}(y_0 - x_0, F)\\
=& \alpha^{-1}\mathrm{dist}(y_0, F) \qquad \text{(en utilisant que } x_0 \in F)\\
=& \frac{\delta}{\|x_0 - y_0\|} > 1 - \varepsilon
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme.

□

Lemme 3.2.5 *Soit E un espace de Banach, $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact et $T = Id_E - K$. Alors on a les propriétés suivantes :*

(a) *Il n'existe pas de chaîne infinie $(F_n)_{n\geq 0}$ de sous-espaces vectoriels fermés de E telle que, pour tout $n \geq 0$, on ait*

$$F_n \subsetneq F_{n+1} \text{ et } T(F_{n+1}) \subset F_n.$$

(b) *Il n'existe pas de chaîne infinie $(F_n)_{n\geq 0}$ de sous-espaces vectoriels fermés de E telle que, pour tout $n \geq 0$, on ait*

$$F_{n+1} \subsetneq F_n \text{ et } T(F_n) \subset F_{n+1}.$$

Preuve : (a) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(F_n)_{n\geq 0}$ de sous-espaces vectoriels fermés de E telle que $F_n \subsetneq F_{n+1}$ et $TF_{n+1} \subset F_n$. Fixons $\varepsilon \in (0,1)$. D'après le lemme 3.2.4, pour tout $n \geq 0$, il existe un vecteur $x_{n+1} \in F_{n+1}$ tel que $\|x_{n+1}\| = 1$ et $\mathrm{dist}(x_{n+1}, F_n) > 1 - \varepsilon$. Puisque $T(F_{n+1}) \subset F_n \subset F_{n+1}$ et $K = Id_E - T$, on a $K(F_{n+1}) \subset F_{n+1}$. Soient alors k, ℓ deux entiers tels que $0 < k < \ell$; le vecteur $T(x_\ell)$ est dans $F_{\ell-1}$ et $K(x_k) \in F_k \subset F_{\ell-1}$, donc $T(x_\ell) + K(x_k) \in F_{\ell-1}$, donc

$$\|K(x_\ell) - K(x_k)\| = \|x_\ell - (T(x_\ell) + K(x_k))\| \geq \mathrm{dist}(x_\ell, F_{\ell-1}) > 1 - \varepsilon.$$

Ainsi l'image $K(\overline{B}_E)$ contient une suite infinie de points dont les distances mutuelles sont $\geq 1 - \varepsilon$, ce qui contredit la compacité de K.

Le (b) se prouve de façon analogue.

□

Corollaire 3.2.6 *Soit E un espace de Banach, $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact et $T = Id_E - K$. La suite croissante des noyaux $(\ker(T^n))_{n\geq 0}$ est stationnaire. La suite décroissante des images $(\mathrm{Im}(T^n))_{n\geq 0}$ est stationnaire.*

Remarque 3.2.7 *Supposons qu'il existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\ker(T^{k_0}) = \ker(T^{k_0+1})$. *Alors on vérifie facilement par récurrence que, pour tout* $k \geq k_0$, *on a* $\ker(T^k) = \ker(T^{k_0})$ *et donc la suite des noyaux* $(\ker(T^n))_{n\geq 0}$ *est stationnaire.*
De même, supposons qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathrm{Im}(T^{k_0}) = \mathrm{Im}(T^{k_0+1})$. *Alors on vérifie facilement par récurrence que, pour tout* $k \geq k_0$, *on a* $\mathrm{Im}(T^k) = \mathrm{Im}(T^{k_0})$ *et donc la suite des images* $(\mathrm{Im}(T^n))_{n\geq 0}$ *est stationnaire.*

Preuve du corollaire 3.2.6 : Posons $F_n = \ker(T^n)$. On vérifie facilement que F_n est fermé, $F_n \subset F_{n+1}$ et $T(F_{n+1}) \subset F_n$ pour tout $n \geq 0$. Si la suite n'était pas stationnaire, alors d'après la remarque 3.2.7, on aurait aussi $F_n \neq F_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi on obtiendrait une contradiction avec le (a) du lemme 3.2.5. Pour le cas des images, le raisonnement est analogue en appliquant cette fois ci le (b) du lemme 3.2.5.

□

Remarque 3.2.8 *Nous verrons plus tard que le plus petit entier* n_0 *à partir duquel les suites* $(\ker(T^n))_{n\geq 0}$ *et* $(\mathrm{Im}(T^n))_{n\geq 0}$ *deviennent stationnaires est le même.*

Corollaire 3.2.9 *Soit* E *un espace de Banach,* $K \in \mathcal{L}(E)$ *un opérateur compact et* $T = Id_E - K$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est injectif.*

(ii) T *est surjectif.*

Preuve : (i) $\Longrightarrow$ (ii) : on raisonne par l'absurde en supposant que T est injectif et non surjectif. Montrons par récurrence que nécessairement $\mathrm{Im}(T^{n+1}) \subsetneq \mathrm{Im}(T^n)$, pour tout $n \geq 0$. Pour $n = 0$, on a

$$\mathrm{Im}(T) \subsetneq E = \mathrm{Im}(Id_E) = \mathrm{Im}(T^0).$$

Supposons que $\mathrm{Im}(T^{k+1}) \subsetneq \mathrm{Im}(T^k)$, pour un certain $k \geq 0$. Soit alors $y \in \mathrm{Im}(T^k)\setminus \mathrm{Im}(T^{k+1})$. Posons $z := Ty$. Comme $y \in \mathrm{Im}(T^k)$ il existe $x \in E$ tel que $y = T^k x$. D'où $z = Ty = T^{k+1}x \in \mathrm{Im}(T^{k+1})$. D'autre part, $z \notin \mathrm{Im}(T^{k+2})$; en effet sinon il existerait $x_1 \in E$ tel que $z = T^{k+2}x_1 = Ty$ et en utilisant l'injectivité de T, on aurait $y = T^{k+1}x_1 \in \mathrm{Im}(T^{k+1})$, ce qui est absurde. D'où $z \in \mathrm{Im}(T^{k+1}) \setminus \mathrm{Im}(T^{k+2})$. En particulier, on obtient que $\mathrm{Im}(T^{k+2}) \subsetneq \mathrm{Im}(T^{k+1})$. Par conséquent, par récurrence, on en déduit que pour tout $n \geq 0$, on a $\mathrm{Im}(T^{n+1}) \subsetneq \mathrm{Im}(T^n)$, ce qui contredit le corollaire 3.2.6.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : raisonnons par l'absurde en supposant que l'opérateur T est surjectif et non injectif. Montrons alors par récurrence que $\ker(T^n) \subsetneq \ker(T^{n+1})$, pour tout $n \geq 0$. Pour $n = 0$, la propriété découle de la non injectivité de T. Supposons alors que $\ker(T^k) \subsetneq \ker(T^{k+1})$, pour un certain $k \geq 0$. Soit alors $x \in \ker(T^{k+1}) \setminus \ker(T^k)$. Comme T est surjectif, il existe $x_1 \in E$ tel que $x = Tx_1$. Alors $T^{k+2}x_1 = T^{k+1}x = 0$ et $T^{k+1}x_1 = T^k x \neq 0$. Ainsi $x_1 \in \ker(T^{k+2}) \setminus \ker(T^{k+1})$. On a donc par récurrence $\ker(T^n) \subsetneq \ker(T^{n+1})$, pour tout $n \geq 0$ et ceci contredit une nouvelle fois le corollaire 3.2.6.

□

Définition 3.2.10 *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. On dit que T est un opérateur de Fredholm si les 3 conditions suivantes sont satisfaites :*

(a) *l'image de T est fermée ;*

(b) *le noyau de T est de dimension finie ;*

(c) *l'image de T est de codimension finie.*

On note alors

$$\mathrm{Ind}(T) := \dim(\ker T) - \mathrm{codim}(\mathrm{Im}\, T)$$

et le nombre entier $\mathrm{Ind}(T)$ *s'appelle l'indice de T.*

Théorème 3.2.11 (Alternative de Fredholm) *Soient E un espace de Banach, $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact et $T = Id_E - K$. Alors T est un opérateur de Fredolm et* $\mathrm{Ind}(T) = 0$.

Preuve : D'après la proposition 3.2.2, $\ker(T)$ est de dimension finie et $\mathrm{Im}(T)$ fermée. Il reste donc à montrer que $\mathrm{Im}(T)$ est de codimension finie, égale à

$\dim(\ker T)$. On va procéder par récurrence sur la dimension de $\ker T$.

Si $\dim(\ker T) = 0$, alors T est surjectif d'après le corollaire 3.2.9 et donc $E/\operatorname{Im}(T) = \{0\}$, ce qui implique que $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} T) = \dim(\ker T)$. Soit maintenant $n = \dim(\ker T) > 0$ et supposons que $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} T') = \dim(\ker T')$ pour tout opérateur $T' = Id_E - K'$, K' compact et $\dim(\ker T') \leq n-1$. Comme $\dim(\ker T) > 0$, le corollaire 3.2.9 implique que T n'est pas surjectif, c'est-à-dire qu'il existe $y_0 \in E \setminus \operatorname{Im}(T)$. D'après le lemme 1.10.5, il existe un sous-espace fermé E_1 de E tel que $E = \ker T \oplus E_1$. Considérons une base $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de $\ker T$ (rappelons que $\dim(\ker T) = n$) et définissons l'application $T' : E = \ker T \oplus E_1 \longrightarrow E$ par

$$T'\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + y\right) = \lambda_1 y_0 + Ty, \qquad (\lambda_i \in \mathbb{K},\ y \in E_1).$$

Il est facile de voir que T' est linéaire. Montrons que $\ker T' = \operatorname{Vect}\ (x_2, x_3, \ldots, x_n)$. L'inclusion

$$\operatorname{Vect}\ (x_2, x_3, \ldots, x_n) \subset \ker T'$$

est évidente par définition. Réciproquement si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + y \in \ker T'$ (avec $y \in E_1$) alors on a $\lambda_1 y_0 + Ty = 0$. Si $\lambda_1 \neq 0$ alors $y_0 = -\lambda_1^{-1} Ty \in \operatorname{Im} T$, ce qui est absurde. Donc $\lambda_1 = 0$ et donc $Ty = 0$. D'où $y \in \ker T \cap E_1 = \{0\}$. Ainsi

$$x = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i \in \operatorname{Vect}\ (x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

ce qui prouve l'autre inclusion et donc $\ker T' = \operatorname{Vect}\ (x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Ainsi en particulier on a $\dim(\ker T') = n-1$. Montrons que $T' = Id - K'$ avec K' compact. Remarquons que l'opérateur $R := T' - T$ est de rang 1 ; en effet, pour tout $x \in E$, on a

$$(T' - T)x = \lambda_1 y_0,$$

d'où $\operatorname{Im}(R) = \mathbb{K} y_0$. Ainsi $T' = T + R = Id_E - K + R = Id_E - K'$ avec $K' = K - R$. Or $K' \in \mathcal{L}(E)$ et K' est compact d'après la proposition 3.1.3. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à T' et en déduire que $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} T')$ est finie et $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} T') = \dim(\ker T') = n - 1$. Or $\operatorname{Im} T' = \mathbb{K}y_0 \oplus \operatorname{Im} T$. En utilisant le lemme 1.10.9, on en déduit que $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} T)$ est finie et $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} T) = \operatorname{codim}(\operatorname{Im} T') + 1 = n - 1 + 1 = n = \dim(\ker T)$. Ceci achève de prouver que T est un opérateur de Fredholm d'indice nul.

$\square$

Remarque 3.2.12 *Dans la remarque 3.2.8, nous avions affirmé (sans le démontrer) que l'entier n_0, à partir duquel les suites $(\ker(T^n))_{n\geq 0}$ et $(\operatorname{Im}(T^n))_{n\geq 0}$ deviennent stationnaires, est le même. Ceci découle du théorème 3.2.11. En effet, comme $T^n = (Id_E - K)^n = Id_E - K_n$ avec K_n compact, $n \geq 1$, le théorème 3.2.11 implique que*

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Im} T^n) = \dim(\ker T^n), \qquad (n \geq 0).$$

Ainsi avec un petit argument de dimension, on voit que $\operatorname{Im}(T^{n_0}) = \operatorname{Im}(T^{n_0+1})$ si et seulement si $\ker(T^{n_0}) = \ker(T^{n_0+1})$.

Théorème 3.2.13 *Soient E un espace de Banach et $K \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur compact. On a l'alternative suivante :*

(a) *soit $\sigma(K)$ est fini.*

(b) *soit $\sigma(K) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \geq 0\}$, $\lambda_n \neq 0$ et $\lambda_n \to 0$, $n \to +\infty$.*

De plus, si $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$, alors λ est une valeur propre de K de multiplicité finie.

Preuve : Remarquons tout d'abord que si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de K alors sa multiplicité est finie. En effet,

$$\ker(K - \lambda Id_E) = \ker(\lambda^{-1}K - Id_E)$$

et comme $\lambda^{-1}K$ est compact, on peut appliquer la proposition 3.2.2 qui implique que le noyau de $\lambda^{-1}K - Id_E$ est de dimension finie.

Montrons maintenant que si $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ alors λ est une valeur propre de K qui, de plus, est isolée dans le spectre de K. Quitte à remplacer K par $\lambda^{-1}K$, on peut supposer que $\lambda = 1$. Posons $T = Id_E - K$. Supposons que 1 n'est pas valeur propre de K. Alors T est injectif et d'après le corollaire 3.2.9, T est finalement bijectif. Autrement dit $1 \notin \sigma(K)$, ce qui est absurde. Cela montre donc que 1 est valeur propre de K. Il reste à montrer qu'elle est isolée dans le spectre de K. Pour cela, nous allons montrer le fait suivant :

Fait 1 : si $1 \in \sigma(K)$ alors il existe $k_0 \geq 1$ tel que $E = \ker T^{k_0} \oplus \operatorname{Im} T^{k_0}$.

Remarquons que $T^n = (Id_E - K)^n = Id_E - K_n$ avec K_n compact, $n \geq 1$. Donc le théorème 3.2.11 implique que

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Im} T^n) = \dim(\ker T^n), \qquad (n \geq 0).$$

De plus, d'après le corollaire 3.2.6, la suite $(\ker(T^n))_{n\geq 0}$ est stationnaire. Soit k_0 le plus petit entier tel que pour tout $k \geq k_0$, on a

$$\ker T^{k_0} = \ker T^k. \tag{3.3}$$

On a $k_0 \geq 1$ car $\ker T^0 = \ker Id_E = \{0\}$ et $\ker T = \ker(Id_E - K) \neq \{0\}$ car 1 est valeur propre de K. On vérifie facilement que l'équation (3.3) implique

$$\ker T \cap \operatorname{Im} T^{k_0} = \{0\}, \tag{3.4}$$

(car sinon $\ker T^{k_0} \subsetneq \ker T^{k_0+1}$) et aussi

$$\ker T^{k_0} \cap \operatorname{Im} T^{k_0} = \{0\}, \tag{3.5}$$

(car sinon $\ker T^{k_0} \subsetneq \ker T^{2k_0}$). L'égalité $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} T^{k_0}) = \dim(\ker T^{k_0})$ et (3.5) impliquent avec le lemme 1.10.10 que

$$E = \ker T^{k_0} \oplus \operatorname{Im} T^{k_0},$$

ce qui achève la preuve du fait 1. Remarquons de plus que $T(\ker T^{k_0}) \subset \ker T^{k_0}$ et $T(\operatorname{Im} T^{k_0}) \subset \operatorname{Im} T^{k_0}$. Notons alors $T_1 := T_{|\ker T^{k_0}}$ et $T_2 := T_{|\operatorname{Im} T^{k_0}}$. Alors bien sûr, on a $T_1 \in \mathcal{L}(\ker T^{k_0})$ et $T_2 \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} T^{k_0})$.

Fait 2 : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout nombre $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| < \delta$, l'opérateur $T_2 - \lambda Id$ est un isomorphisme sur $\operatorname{Im} T^{k_0}$.

Nous allons montrer que T_2 est un isomorphisme. Remarquons que T_2 est injective d'après (3.4). On peut alors appliquer le corollaire 3.2.9 à T_2 et on en déduit que T_2 est un isomorphisme de $\operatorname{Im} T^{k_0}$ sur $\operatorname{Im} T^{k_0}$. Comme Inv $(\mathcal{L}(\operatorname{Im} T^{k_0}))$ est un ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout nombre $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| < \delta$, $T_2 - \lambda Id$ reste un isomorphisme sur $\operatorname{Im} T^{k_0}$. Ceci prouve le fait 2.

Fait 3 : pour tout $\lambda \neq 0$, l'opérateur $T_1 - \lambda Id$ est un isomorphisme sur $\ker T^{k_0}$.

Vérifions d'abord que si $\lambda \neq 0$, alors l'opérateur $T_1 - \lambda Id$ est injectif. Soit $x \in \ker(T_1 - \lambda Id)$. Alors $x \in \ker T^{k_0}$ et $Tx = \lambda x$. Nous allons montrer par récurrence descendante que pour tout $0 \leq j \leq k_0$, $T_j x = 0$. Pour $j = k_0$, la propriété est vérifiée car $x \in \ker T^{k_0}$. Supposons que pour $1 \leq j \leq k_0$ alors $T^j x = 0$. Alors en utilisant que $Tx = \lambda x$, on a $T^{j-1}(\lambda x) = T^j x = 0$. D'où $T^{j-1}x = 0$ car $\lambda \neq 0$. Ainsi on obtient que $x = 0$. L'opérateur $T_1 - \lambda Id$ est donc injectif et finalement un isomorphisme car $\dim(\ker T^{k_0}) < +\infty$. Ceci achève la preuve du fait 3.

En utilisant les faits 2 et 3, on en déduit donc que l'opérateur

$$T - \lambda Id_E = (T_1 - \lambda Id_{|\ker T^{k_0}}) \oplus (T_2 - \lambda Id_{|\operatorname{Im} T^{k_0}})$$

est un isomorphisme pour tout $\lambda \neq 0$ assez petit. Ainsi 0 est un point isolé de $\sigma(T)$, c'est-à-dire que 1 est un point isolé de $\sigma(K)$. On a donc prouvé que pour tout $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$, λ est un point isolé du spectre de K. Autrement dit, si $0 < r < R$, l'ensemble $\{z \in \sigma(K) : r \leq |z| \leq R\}$ est fini. Donc si $\sigma(K)$ est infini, alors ceci permet de ranger les valeurs de $\sigma(K)$ en une suite $(\lambda_n)_n$ qui tend vers 0 (car le spectre de K est fermé).

$\square$

Pour $T \in \mathcal{L}(E)$, on notera $\sigma_p(T)$ l'ensemble (éventuellement vide) des valeurs propres de T.

Théorème 3.2.14 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur com-*

pact et normal. Alors

$$\mathcal{H} = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)}} \ker(T - \lambda Id_{\mathcal{H}}).$$

En particulier, $\mathcal{H}$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.

Preuve : Pour $\lambda \in \sigma_p(T)$, notons $E_\lambda = \ker(T - \lambda Id_{\mathcal{H}})$. D'après le lemme 2.2.4, on a

$$\ker(T - \lambda Id_{\mathcal{H}}) = \ker(T^* - \bar{\lambda} Id_{\mathcal{H}}),$$

(car si T est normal, $T - \lambda Id_{\mathcal{H}}$ est aussi normal). Montrons que $E_\lambda \perp E_\mu$, pour tout $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq \mu$. Soit $x \in E_\lambda$, $y \in E_\mu$. Alors

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^* y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

où la dernière égalité provient du fait que $y \in E_\mu = \ker(T^* - \bar{\mu} Id_{\mathcal{H}})$. On en déduit donc que

$$(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0,$$

soit comme $\lambda \neq \mu$, on obtient $\langle x, y \rangle = 0$. Ceci prouve donc que $E_\lambda \perp E_\mu$ et les sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux. Maintenant notons

$$F := \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)}} \ker(T - \lambda Id_{\mathcal{H}}),$$

et montrons que $F = \mathcal{H}$. Raisonnons par l'absurde, en supposant que $F^\perp \neq \{0\}$. Remarquons que, pour tout $\lambda \in \sigma_p(T)$, on a $TE_\lambda \subset E_\lambda$ et $T^* E_\lambda \subset E_\lambda$. D'où $TF \subset F$ et $T^* F \subset F$. La proposition 2.1.5 implique alors que

$$T^* F^\perp \subset F^\perp \quad \text{et} \quad TF^\perp \subset F^\perp. \tag{3.6}$$

Considérons $T_1 := T_{|F^\perp}$. En utilisant (3.6), on vérifie que T_1 est un opérateur normal et compact. Donc en utilisant l'exercice 2.4.7, on en déduit qu'il existe $\mu_1 \in \sigma(T_1)$ tel que $|\mu_1| = \|T_1\|$. Supposons $\mu_1 = 0$; alors dans ce cas, cela signifie que $T_1 = 0$, soit encore que $F^\perp \in \ker T$. Mais ceci est absurde car $\ker T \subset F$. Ainsi $\mu_1 \neq 0$. On sait alors d'après le théorème 3.2.13 que μ_1 est une valeur propre de T_1. Autrement dit, il existe $x \in F^\perp$, $x \neq 0$ tel que $T_1x = \mu_1 x$, soit encore $Tx = \mu_1 x$. Donc x est aussi un vecteur propre de T et donc $x \in F$. Ceci est absurde. On en conclut donc que $F = \mathcal{H}$. Pour obtenir une base orthonormée de $\mathcal{H}$ formée de vecteurs propres de T, on rassemble des bases orthonormées de chaque espace E_λ , $\lambda \neq 0$, qui sont des bases finies, et s'il y a lieu, une base orthonormée du noyau E_0.

□

3.3 Exercices

3.3.1 Premiers exemples d'opérateurs compacts : shifts pondérés, opérateurs intégraux et opérateur de Volterra

Exercice 3.3.1 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de nombres complexes et soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $T(e_n) = \lambda_n e_n$. Montrer que T est compact si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.*

Exercice 3.3.2 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Banach et T une application linéaire continue compacte de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Montrer que si l'image de T est fermée, alors elle est de dimension finie.*

Exercice 3.3.3 *Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ ou $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ muni de la norme du supremum : $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. On définit T sur E par*

$$T_K f(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy,$$

*où $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. L'opérateur T_K est appelé **opérateur intégral**.*

1. *Montrer que T_K est une application linéaire et continue de E dans E.*
2. *En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer que T_K est compacte.*

Exercice 3.3.4 *Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$, noté $\mathcal{C}([0,1])$, muni de la norme infini. On définit V sur $\mathcal{H}$ par*

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

*L'opérateur V est appelé **l'opérateur de Volterra***

1. *Montrer que V est une application linéaire et continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.*
2. *A l'aide du théorème d'Ascoli, montrer que V est un opérateur compact.*
3. *Montrer que V n'a pas de valeur propre.*
4. *Montrer que le rayon spectral de V est 0. On dit que V est **quasinilpotent**.*

3.3.2 Opérateurs de Hilbert–Schmidt

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Par définition on dit que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur de Hilbert–Schmidt si

$$\|T\|_2^2 := \sum_{n\geq 0} \|T(e_i)\|^2 < \infty.$$

Exercice 3.3.5 *On notera par $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert–Schmidt.*

1. *Montrer que $\sum_{n\geq 0} \|T(e_i)\|^2$ est indépendant du choix de la base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$.*
2. *Montrer que $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est un espace vectoriel normé complet muni pour la norme $\|\cdot\|_2$.*
3. *Montrer que $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est composé d'opérateurs compacts.*
4. *Montrer que $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*
5. *Soit $K \in L^2([0,1],[0,1])$ et soit T défini sur $L^2([0,1])$ par*

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

   Montrer que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

3.3.3 Décomposition des opérateurs compacts

Exercice 3.3.6 *Soit Δ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et K une fonction complexe de carré intégrable sur $\Delta \times \Delta$ telle que $K(t,t') = \overline{K(t',t)}$ pour tout $t, t' \in \Delta$.*

1. *Soit v_K l'endomorphisme de $L^2(\Delta)$ défini par*
$$(v_K f)(t') = \int_\Delta K(t,t')f(t)dt \qquad (t' \in \Delta).$$
Montrer que le spectre de v_K se compose de 0 et d'une suite de valeurs propres réelles de multiplicités finies.

2. *Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ la suite des valeurs propres non nulles de v_K, chacune écrite un nombre de fois égal à sa multiplicité. Montrer que l'on a :*
$$\sum_n \lambda_n^2 = \int_\Delta \int_\Delta |K(t,t')|^2 dt dt' < \infty.$$

3. *Montrer que $L^2(\Delta)$ est la somme directe hilbertienne des sous-espaces propres de v_K correspondant aux différentes valeurs propres.*

4. *Choisissons un système orthormal $(\varphi_n)_n$ dans $L^2(\Delta)$ tel que $v_K\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ pour tout n. Pour tout $f \in L^2(\Delta)$, posons*
$$c_n = \int_\Delta f(t)\overline{\varphi_n(t)}dt.$$
Montrer que l'on a :
$$v_K f = \sum_n \lambda_n c_n \varphi_n,$$
la série convergeant normiquement dans $L^2(\Delta)$.

5. *Soit λ un nombre complexe non nul distinct de tous les λ_n. Soit $g \in L^2(\Delta)$ et posons $d_n = \int_\Delta g(t)\overline{\varphi_n(t)}dt$. Montrer qu'il existe $h \in L^2(\Delta)$ et une seule fonction $h \in L^2(\Delta)$ telle que*
$$\int_\Delta K(t,t')h(t)dt - \lambda h(t') = g(t')$$

presque partout dans Δ, et h est donné par la série

$$h = -\frac{1}{\lambda}g + \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n - \lambda)} d_n \varphi_n$$

convergeant normiquement dans $L^2(\Delta)$.

6. *Soit φ_{nm} la fonction définie sur $\Delta \times \Delta$ par*

$$\varphi_{nm}(t, t') = \overline{\varphi_n(t)}\varphi_m(t').$$

Montrer que

$$K = \sum_n \lambda_n \varphi_{nn},$$

la série convergeant normiquement dans $L^2(\Delta \times \Delta)$.

7. *On suppose maintenant que Δ est compact et K continue sur $\Delta \times \Delta$. Montrer que pour tout $f \in L^2(\Delta)$ la fonction $v_K f$ est continue. En déduire que les fonctions propres de v_K correspondant à une valeur propre non nulles sont continues.*

8. *Montrer que pour $f \in L^2(\Delta)$ la série*

$$v_K f = \sum_n \lambda_n c_n f_n$$

converge uniformément et absolument (en se plaçant dans les hypothèses de la question précédente.

9. *On reprend les notations et les hypothèses de 7. et 8. Montrer que pour toute fonction g continue sur Δ, l'unique $h \in L^2(\Delta)$ telle que, pour tout $\lambda \neq 0$,*

$$\int_\Delta K(t, t')h(t)dt - \lambda h(t') = g(t')$$

presque partout dans Δ, possède un représentant continu. Montrer que

$$h = -\frac{1}{\lambda}g + \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n - \lambda)} d_n \varphi_n$$

où cette série converge uniformément et absolument.

Chapitre 4

Séries de Fourier et applications

4.1 Analyse de Fourier pour les fonctions périodiques et localement intégrables

4.1.1 Fonctions périodiques

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et soit $G := \{a \in \mathbb{R} : f(x+a) = f(x), x \in \mathbb{R}\}$. On voit aisément que G est un groupe additif de $\mathbb{R}$, appelé groupe des périodes de f. La fonction f est dite périodique si $G \neq \{0\}$ (on dit que f est a-périodique si $a \neq 0$, $a \in G$) et f est non périodique sinon. Si f est continue, G est fermé et il y a trois possibilités : (i) $G = \mathbb{R}$ et f est constante ; (ii) $G = \{0\}$ et f n'est pas périodique ; (iii) $G = T\mathbb{Z}$, avec $T > 0$ et T s'appelle la plus petite période de f.

De façon générale, l'étude d'une fonction T-périodique f se ramène à l'étude d'une fonction 2π-périodique g avec $g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$. Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. C'est une algèbre de Banach pour le produit usuel et muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = \sup_{t\in[0,2\pi]} |f(t)|$.

Définition 4.1.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbb{C}$ équipée d'une norme $\|\cdot\|$. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *$\mathcal{A}$ est un $\mathbb{C}$-espace de Banach (i.e. un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé, complet)*

(ii) *pour tous* $x, y \in \mathcal{A}$, *on a*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Notons $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. On remarque que l'on a l'équivalence suivante :

$$f \in \mathcal{C} \iff \exists g \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \quad \text{tel que} \quad f(t) = g(e^{it}),$$

où $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ désigne l'espace des fonctions continues sur le cercle unité.

C'est pourquoi, dans la suite, nous nous limiterons à l'étude des fonctions de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

4.1.2 Coefficients de Fourier

Si $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{T})$ désigne l'espace vectoriel des classes de fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, Lebesgue mesurable, telles que $\|f\|_p < \infty$ avec

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^p dt\right)^{1/p} \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty$$

et où $\|f\|_\infty$ est la borne supérieure essentielle de $|f|$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, le nième *coefficient de Fourier* de f est défini par :

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}dt.$$

Le *spectre* de f, noté $Sp(f)$, est défini par

$$Sp(f) = \{n \in \mathbb{Z} : \widehat{f}(n) \neq 0\}.$$

La suite $\widehat{f} := (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est appelée la *tranformée de Fourier de* f. Comme $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$, on en déduit que $\widehat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ avec $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Par conséquent, la transformation de Fourier

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) & \to & \ell^\infty(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

est une application linéaire continue et contractante. Comme pour $f \equiv 1$, $\|\widehat{f}\|_\infty = 1$, la norme de $\mathcal{F}$ est 1.

Nous montrerons plus tard que $\mathcal{F}$ est injective.

Notons le lien entre les coefficients de Fourier de f et f' :

Lemme 4.1.2 *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ qui de plus est C^1 par morceaux. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n).$$

Preuve : On peut écrire $[0, 2\pi] = \cup_{j=0}^{l-1}[a_j, a_{j+1}]$, où $0 = a_0 < \cdots < a_l = 2\pi$ et où f est C^1 sur l'arc $[e^{ia_j}, e^{ia_{j+1}}]$. Une intégration par parties donne

$$\int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(e^{it})e^{-int}dt = [f(e^{it})e^{-int}]_{a_j}^{a_{j+1}} + in\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(e^{it})e^{-int}dt.$$

En sommant ces égalités de $j = 0$ à $l - 1$ et en divisant par 2π, on obtient

$$\widehat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi}[f(e^{it})e^{-int}]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt = in\widehat{f}(n).$$

$\square$

Le lemme suivant va nous permettre de préciser l'image de $\mathcal{F}$.

Lemme 4.1.3 (Riemann–Lebesgue) *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, et soient $f \in L^1([a, b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\begin{aligned}\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt &= \lim_{|\lambda|\to\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt \\ &= \lim_{|\lambda|\to\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt \\ &= 0.\end{aligned}$$

Preuve : En utilisant la décomposition $f = f_1 + if_2$, où f_1, f_2 sont réelles, il suffit de prouver le lemme avec f réelle. De plus, comme $e^{i\lambda t} = \cos(\lambda t) + i\sin(\lambda t)$, avec f réelle, il suffit de prouver que la première limite est nulle, autrement dit de prouver que si $(\lambda_n)_n$ est une suite de réels non nuls tels que $|\lambda_n| \to \infty$, alors $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda_n t}dt = 0$.

Définissons une suite $(\ell_n)_{n\geq 1}$ de formes linéaires sur $L^1([a, b])$ par la formule

$$\ell_n(g) = \int_a^b g(t)e^{i\lambda_n t}dt.$$

Comme $|\ell_n(g)| \leq \int_a^b |g(t)|dt = \|g\|_1$, ℓ_n est continue et même contractante. Le point clé pour la suite est que $\sup_n \|\ell_n\| < \infty$.

Si $I = [u, v]$ est un intervalle de $[a, b]$, on a :

$$\ell_n(\chi_I) = \int_u^v e^{i\lambda_n t} dt = \frac{1}{i\lambda_n}(e^{i\lambda_n v} - e^{i\lambda_n u}),$$

où χ_I est la fonction caractéristique de l'intervalle I. En particulier, $|\ell_n(\chi_I)| \leq \frac{2}{|\lambda_n|} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Comme les fonctions χ_I forment une partie totale de $L^1([a, b])$, avec $\sup_n \|\ell_n\| = 1 < \infty$, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \ell_n(g) = 0,$$

pour tout $g \in L^1([a, b])$. En effet, soit $\epsilon > 0$ et h dans l'enveloppe linéaire des fonctions de la forme χ_I telle que $\|h - g\|_1 < \epsilon$. Par linéarité de ℓ_n, $\lim_{n\to\infty} \ell_n(h) = 0$. Soit N tel que si $n \geq N$, $|\ell_n(h)| < \epsilon$. Alors, pour $n \geq N$, on a :

$$|\ell_n(g) - \ell_n(h)| = |\ell_n(g - h)| \leq \|\ell_n\| \|g - h\|_1 = \|g - h\|_1 < \epsilon.$$

Par l'inégalité triangulaire, il en résulte que $\|\ell_n(g)\| \leq \epsilon + |\ell_n(h)| < 2\epsilon$.

□

On obtient le résultat immédiat suivant.

Corollaire 4.1.4 *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{f}(n) = 0,$$

et ainsi $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{T})) \subset c_0(\mathbb{Z}) := \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} : a_n \in \mathbb{C}, \lim_{|n|\to\infty} |a_n| = 0\}$.

Nous verrons en exercice que $\mathcal{F}$, à valeurs dans $c_0(\mathbb{Z})$, n'est pas surjective.

Remarque 4.1.5 *Tout ce qui précède et tout ce qui suit reste valable pour les fonctions T-périodiques ($T > 0$), en remplaçant les coefficients de Fourier par la formule :*

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{2i\pi nt/T} dt.$$

Tout d'abord nous allons développer certaines techniques. La *série de Fourier* de f s'écrit *formellement*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{int}.$$

Cette définition est motivée par le fait que la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique P coïncide avec P.

La question centrale en analyse de Fourier pour les fonctions de $L^1(\mathbb{T})$, est de savoir *quand*, *comment* et *vers quoi* cette série converge.

On notera par $S_n(f)$ la somme dite *somme partielle d'ordre* n *de* f, le polynôme trigonométrique suivant :

$$S_n(f)(e^{it}) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikt}.$$

Toute série formelle de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$$

est appelée une *série trigonométrique*. Par conséquent, une série de Fourier est un cas particulier de série trigonométrique. Cependant il existe des séries trigonométriques qui ne sont pas des séries de Fourier, i.e. il existe des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui ne sont pas les coefficients de Fourier d'une fonction intégrable.

Via l'identité $e^{int} = \cos nt + i\sin nt$, une série trigonométrique peut s'écrire sous la forme :

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt).$$

Un exemple très important qui joue un rôle central dans la théorie des fonctions harmoniques (fonctions f de classe C^2 sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ dont le laplacien $\bigtriangledown f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est nul sur $\mathbb{D}$) est le noyau de Poisson

$$P_r(e^{it}) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}, \quad (0 \le r < 1).$$

Il est clair que $P_r \in C^\infty(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$.

Un calcul direct de $\widehat{P_r}$ semble difficile à première vue. Mais l'observation suivante rend les calculs plus faciles :

$$\begin{aligned}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} &= \frac{1-r^2}{(1-re^{it})(1-re^{-it})}\\ &= \frac{1}{1-re^{it}}+\frac{1}{1-re^{-it}}-1\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int}.\end{aligned}$$

De plus, pour chaque $r<1$, les sommes partielles convergent *uniformément* vers P_r. La convergence uniforme est la clé pour cette méthode rapide car elle parmet d'inverser somme et intégrale dans ce qui suit :

$$\begin{aligned}\widehat{P_r}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(e^{it})e^{-int}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{imt}\right)e^{int}dt\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t}dt\right)\\ &= r^{|n|}.\end{aligned}$$

L'égalité $\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}=\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int}$ montre que P_r est égal à sa série de Fourier en tout point de $\mathbb{T}$.

4.1.3 Convolution sur $\mathbb{T}$

Soient f et g dans $L^1(\mathbb{T})$. En général on ne peut pas conclure que $fg\in L^1(\mathbb{T})$. En effet, si $f(e^{it})=\frac{1}{\sqrt{t}}=g(e^{it})$ avec $f(1)=g(1)=0$, on remarque que

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{it})g(e^{it})|dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{t}dt=\infty,$$

mais $f,g\in L^1(\mathbb{T})$. Cependant, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\tau})g(e^{i(t-\tau)})|d\tau\right)dt &= \int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\tau})|\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(e^{i(t-\tau)})|dt\right)d\tau\\ &= \|f\|_1\|g\|_1.\end{aligned}$$

Par conséquent $\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\tau})g(e^{i(t-\tau)})|d\tau < \infty$ pour presque tout t. Cette observation implique que l'on peut bien définir

$$f \star g(e^{it}) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\tau})g(e^{i(t-\tau)})d\tau$$

pour presque tout t et de plus $f \star g \in L^1(\mathbb{T})$ avec

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

La fonction $f \star g$ est appelée la *convolution* de f et g.

Il est immédiat de constater que la convolution est

1. commutative : $f \star g = g \star f$;
2. associative : $(f \star g) \star h = f \star (g \star f)$;
3. distributive : $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$;
4. homogène : $f \star (\alpha g) = (\alpha f) \star g = \alpha(f \star g)$,

pour tous $f, g, h \in L^1(\mathbb{T})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

En fait $L^1(\mathbb{T}, +, \star)$ est une algèbre de Banach, dont la définition a été rappelée au début du chapitre.

Cet exemple concret a largement inspiré la théorie des algèbres de Banach.

Notons que si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ et $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, via Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{is})(f \star g)(e^{is})\frac{ds}{2\pi} &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{is})f(e^{i(s-\tau)})g(e^{i\tau})\frac{d\tau}{2\pi}\frac{ds}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i(t+\tau)})f(e^{it})\frac{dt}{2\pi}\right) g(e^{i\tau})\frac{d\tau}{2\pi}. \end{aligned}$$

Le théorème suivant est facile à prouver. Néanmoins c'est le lien fondamental entre la convolution et la transformée de Fourier, à savoir : la transformée de Fourier change la convolution en produit.

Théorème 4.1.6 *Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, alors $\widehat{f \star g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$.*

Preuve : Fixons $n \in \mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned}
\widehat{f \star g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}(f \star g)(e^{it})dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i(t-\tau)})g(e^{i\tau})e^{-in(t-\tau)}e^{-in\tau}d\tau dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\tau})e^{-in\tau}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i(t-\tau)})e^{-in(t-\tau)}dt\right)d\tau \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\tau})e^{-in\tau}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}dt\right)d\tau \\
&= \widehat{f}(n)\widehat{g}(n).
\end{aligned}$$

□

4.1.4 Inégalité de Young

Comme $L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ pour tout $p \in [1, \infty]$ et comme la convolution est définie sur $L^1(\mathbb{T})$, a priori, $f \star g$ est bien définie pour tout $f \in L^r(\mathbb{T})$ et $g \in L^s(\mathbb{T})$ avec $1 \leq r, s \leq \infty$. Le résultat suivant donne plus d'information lorsque l'on restreint f et g à des sous-classes de $L^1(\mathbb{T})$.

Théorème 4.1.7 (Inégalité de Young) *Soit $f \in L^r(\mathbb{T}), g \in L^s(\mathbb{T})$ où $1 \leq r, s \leq \infty$ et $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \geq 1$. Soit p défini par*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} - 1.$$

Alors $f \star g \in L^p(\mathbb{T})$ et

$$\|f \star g\|_p \leq \|f\|_r \|g\|_s.$$

Preuve : Si $p = \infty$, ou si, de façon équivalente, si $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, alors $f \star g$ est défini partout sur $\mathbb{T}$ et l'inégalité de Young se réduit à l'inégalité de Hölder. Supposons maintenant que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} > 1$. Nous allons utiliser une forme généralisée de l'inégalité de Hölder, comme suit. Soient $1 < p_1, \cdots, p_n < \infty$ tels que

$$\frac{1}{p_1} + \cdots \frac{1}{p_n} = 1,$$

et soient $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions mesurables d'un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Alors on a :

$$\int_X |f_1 \cdots f_n| d\mu \leq \left(\int_X |f_1|^{p_1} d\mu \right)^{1/p_1} \cdots \left(\int_X |f_n|^{p_n} d\mu \right)^{1/p_n}.$$

Cette inégalité s'obtient par induction, à l'aide de l'inégalité de Hölder classique. Soient r' et s' les exposants conjugués de r et s respectivement, i.e.

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1.$$

Par définition de p, on obtient alors :

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'} + \frac{1}{p} = 1.$$

Fixons $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. En vue d'appliquer l'inégalité de Hölder généralisée, on va écrire l'intégrant $|f(e^{i\theta})g(e^{i(\theta-t)})|$ comme le produit de trois fonctions appartenant respectivement à $L^{r'}(\mathbb{T})$, $L^{s'}(\mathbb{T})$ et $L^p(\mathbb{T})$. Plus précisément on a

$$\begin{aligned} |f(e^{i\theta})g(e^{i(\theta-t)})| &= |g(e^{i(\theta-t)})|^{1-s/p} \\ &\times |f(e^{i\theta}|^{1-r/p} \\ &\times |f(e^{i\theta}|^{r/p}|g(e^{i(\theta-t)})|^{s/p}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder généralisée, on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})g(e^{i(\theta-t)})| d\theta &\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i(\theta-t)})|^{r'(1-s/p)} d\theta \right)^{1/r'} \\ &\times \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}|^{s'(1-r/p)} d\theta \right)^{1/s'} \\ &\times \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}|^{r}|g(e^{i(\theta-t)})|^{s} d\theta \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Comme $r'(1-s/p) = s$ et $s'(1-r/p) = r$, on obtient

$$|(f \star g)(e^{it})| \leq \|g\|_s^{s/r'} \|f\|_r^{r/s'} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}|^{r}|g(e^{i(\theta-t)})|^{s} d\theta \right)^{1/p},$$

pour presque tout $e^{it} \in \mathbb{T}$. Finalement, en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|f\star g\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|(f\star g)(e^{it})|^p dt\right)^{1/p}\\
&\leq \|g\|_s^{s/r'}\|f\|_r^{r/s'}\left(\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta}|^r|g(e^{i(\theta-t)})|^s d\theta dt\right)^{1/p}\\
&= \|g\|_s^{s/r'}\|f\|_r^{r/s'}\|g\|_s^{s/p}\|f\|_r^{r/p} = \|f\|_r\|g\|_s.
\end{aligned}$$

□

On peut aussi prouver ce résultat à l'aide du théorème d'interpolation de Riesz–Thorin (cf. suite du cours).

Voici deux cas particuliers très utilisés de l'inégalité de Young.

Corollaire 4.1.8 *Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $g \in L^1(\mathbb{T})$. Alors $f\star g \in L^p(\mathbb{T})$ et*

$$\|f\star g\|_p \leq \|f\|_p\|g\|_1.$$

Corollaire 4.1.9 *Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$ et soit $g \in L^q(\mathbb{T})$, où q est l'exposant conjugué de p. Alors $f\star g$ est bien défini pour tout $e^{it} \in \mathbb{T}$, $f\star g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, et*

$$\|f\star g\|_\infty \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Preuve : La seule chose à prouver est la continuité de $f\star g$. Notons que l'inégalité de Hölder garantit que $(f\star g)(e^{it})$ est bien défini pour tout $e^{it} \in \mathbb{T}$.

Au moins un des deux indices p ou q est fini. Sans perte de généralité, supposons que $p \neq \infty$. Alors $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ est dense dans $L^p(\mathbb{T})$. Ainsi, pour $\epsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tel que

$$\|f-\varphi\|_p < \epsilon.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
|(f\star g)(e^{it}) - (f\star g)(e^{is})| &\leq |((f-\varphi)\star g)(e^{it})| + |((f-\varphi)\star g)(e^{is})|\\
&+ |(\varphi\star g)(e^{it}) - (\varphi\star g)(e^{is})|\\
&\leq 2\|f-\varphi\|_p\|g\|_q + \omega_\varphi(|t-s|)\|g\|_q,
\end{aligned}$$

où

$$\omega_\varphi(\delta) = \sup_{|t-s|\leq\delta} |\varphi(e^{it}) - \varphi(e^{is})|$$

est le module de continuité de φ. Comme φ est uniformément continue sur $\mathbb{T}$,

$$\lim_{\delta\to 0} \omega_\varphi(\delta) = 0.$$

Par conséquent, si $|t-s|$ est assez petit, nous avons

$$|(f\star g)(e^{it}) - (f\star g)(e^{is})| \leq 3\epsilon\|g\|_q.$$

$\square$

4.1.5 Les principaux noyaux trigonométriques

Le noyau de Dirichlet

Posons $D_n(e^{it}) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$. On appelle D_n *le noyau de Dirichlet* d'ordre n. On remarque tout de suite que $D_n(e^{it}) = D_n(e^{-it})$ et de plus $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(e^{it})dt = 1$. Une autre expression du noyau de Dirichlet est la suivante :

$$D_n(e^{it}) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} &= e^{-int}\sum_{0}^{2n} e^{ikt} \\
&= e^{-int}\frac{1-e^{i(2n+1)t}}{1-e^{it}} \\
&= e^{-int}\frac{e^{(2n+1)it/2}\left(e^{-(2n+1)it/2} - e^{(2n+1)it/2}\right)}{e^{it/2}\left(e^{-it/2} - e^{it/2}\right)} \\
&= \frac{-2i\sin((2n+1)t/2)}{-2i\sin(t/2)} \\
&= \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}.
\end{aligned}$$

Le lien entre le noyau de Dirichlet et le développement en série de Fourier est le suivant :

Proposition 4.1.10 *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ et tout entier $n \geq 0$, on a :*

$$f \star D_n = S_n(f),$$

où $S_n(f)(e^{it}) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikt}$.

Preuve : On observe que si l'on pose $e_n(e^{it}) = e^{int}$, on a

$$f \star e_n(e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i(t-\tau)})e^{in\tau}d\tau = \int_{t-2\pi}^{t} f(e^{iu})e^{in(t-u)}du = \widehat{f}(n)e_n(e^{it}).$$

La linéarité du produit de convolution permet de conclure.

□

Si $D := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n$ était une fonction de $L^1(\mathbb{T})$, la série de Fourier de f serait donc le produit de convolution de f par D. Il n'en ai rien comme nous le verrons explicitement en exercice par une estimation de $\|D_n\|_1$.

Le noyau de Fejér

Posons $K_n(e^{it}) = \frac{D_0+\cdots+D_{n-1}}{n}$. On appelle K_n *le noyau de Fejér* d'ordre $n \geq 1$. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on notera par $\sigma_n(f)$ *la somme de Fejér* d'indice n de f définie par

$$\sigma_n(f) = \frac{S_0(f) + \cdots + S_{n-1}(f)}{n}.$$

La proposition suivante donne deux autres expressions utiles du noyau de Fejér.

Proposition 4.1.11 *Le noyau de Fejér d'ordre n est égal à*

$$K_n(e^{it}) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)e_k(e^{it}),$$

ou encore à

$$K_n(e^{it}) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2.$$

En particulier, il est alors clair que K_n est positive, paire et $\|K_n\|_1 = 1$.

Preuve : Par définition on a :

$$\begin{aligned} nK_n &= \sum_{j=0}^{n-1} D_j = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{|k|\leq j}^{n} e_k) \right) = \sum_{|k|\leq n-1} e_k \left(\sum_{|k|\leq j\leq n-1} 1 \right) \\ &= \sum_{|k|\leq n-1} (n-|k|)e_k, \end{aligned}$$

ce qui donne la première égalité en divisant par n.

D'autre part, d'après l'expression du noyau de Dirichlet, on a aussi :

$$\begin{aligned} nK_n(e^{it}) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\sin((j+1/2)t)}{\sin(t/2)} = \frac{1}{\sin(t/2)} \operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{i(j+1/2)t} \right) \\ &= \frac{1}{\sin(t/2)} \operatorname{Im} \left(e^{it/2} \frac{1-e^{int}}{1-e^{it}} \right) = \frac{1}{\sin(t/2)} \operatorname{Im} \left(e^{it/2} \frac{e^{int/2} 2i \sin(nt/2)}{e^{it/2} 2i \sin(t/2)} \right) \\ &= \frac{\sin(nt/2)}{\sin^2(t/2)} \operatorname{Im} e^{int/2} = \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)}, \end{aligned}$$

ce qui donne la seconde égalité en divisant par n.

□

Nous avons établi que le noyau de Dirichlet est lié à la somme partielle d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$. Le noyau de Fejér est lui très utile pour exprimer la somme partielle de Fejér de f.

Proposition 4.1.12 *Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \geq 1$ un entier. Alors on a*

$$\sigma_n(f) = f \star K_n = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}(k) e_k.$$

Preuve : D'après la proposition 4.1.10, et la linéarité du produit de convolution, on a

$$n\sigma_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f \star D_n = f \star \left(\sum_{k=0}^{n-1} D_k \right).$$

On en déduit immédiatement l'égalité $\sigma_n(f) = f \star K_n$. D'après la proposition 4.1.11 et les propriétés du produit de convolution, on a aussi :

$$\sigma_n(f) = f\star \left(\sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e_k \right) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) f\star e_k = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}(k) e_k.$$

□

Le noyau de Gibbs

Pour $n \geq$ entier, le *noyau de Gibbs* d'ordre n est défini par

$$G_n(e^{it}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kt)}{k}.$$

La proposition suivante donne des informations sur la limite ponctuelle et la norme essentielle de ce noyau.

Proposition 4.1.13 *1.* $\|G_n\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} + 1$.

2. Pour $0 < t < 2\pi$*,* $\lim_{n\to\infty} G_n(e^{it}) = \frac{\pi - t}{2} =: G(t)$.

3. $\liminf_{n\to\infty} \|G_n\|_\infty \geq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = 1,85... > \frac{\pi}{2} = \|G\|_\infty$.

Preuve : 1. Soit $r \in [0,1[$ et soit $f_r(e^{it}) = \sum_{n\geq 1} \frac{r^n \sin(nt)}{n}$. Notons que cette série converge normalement. On a donc

$$f_r'(e^{it}) = \sum_{n\geq 1} r^n \cos(nt) = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} r^n (e^{int} + e^{-int}).$$

Comme $\sum_{n\geq 1} r^n e^{int} = re^{it} \frac{1}{1 - re^{it}}$, on obtient facilement :

$$f_r'(e^{it}) = \frac{1}{2} \left(\frac{re^{it}}{1 - re^{it}} + \frac{re^{-it}}{1 - re^{-it}} \right) = \frac{r\cos t - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}.$$

On vérifie que $f_r'(e^{it}) = g_r'(e^{it})$ où $g_r(e^{it}) = \arctan\left(\frac{r \sin t}{1 - r\cos t}\right)$. Comme $f_r(1) = g_r(1)$, $f_r = g_r$. Par conséquent

$$\|f_r\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}.$$

Comme $\widehat{f_r}(k) = \frac{r^{|k|}}{2ik}$ si $k \neq 0$, d'après la proposition 4.1.12,

$$\begin{aligned} f_r \star K_n(e^{it}) &= \sum_{k=-n}^{n} (1 - |k|/n) \widehat{f_r}(k) e_k \\ &= \sum_{k=-n, k\neq 0}^{n} (1 - |k|/n) \frac{r^|k| e_k}{2ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (1 - k/n) \frac{r^k \sin(kt)}{k}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(1-k/n)\frac{r^k\sin(kt)}{k}\right| \leq \|f_r\|_\infty \|K_n\|_1 = \|f_r\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}.$$

De plus,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{-k}{n}\frac{r^k\sin(kt)}{k}\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r^k \leq 1.$$

Par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{r^k\sin(kt)}{k}\right| \leq \frac{\pi}{2}+1.$$

En faisant tendre r vers 1, on obtient $\|G_n\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}+1$.

2. Pour $0<t<2\pi$, considérons la série

$$S(z)=\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nt)}{n}z^n.$$

Son rayon de convergence est 1 et $S(1)$ converge car si $0<t<2\pi$, les sommes partielles

$$\sum_{n=1}^{N}\sin(nt) = \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{N}(e^{int}-e^{-int}) = e^{it}\frac{1-e^{iNt}}{1-e^{it}}-e^{-it}\frac{1-e^{-iNt}}{1-e^{-it}} = 4i\cos(t/2)\sin(N/2)$$

sont uniformément majorées par 4, et $n\to\frac{1}{n}$ décroit vers 0. D'après le théorème d'Abel radial, $S(z)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$. En particulier, $r\mapsto\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nt)}{n}r^n$ est continue sur $[0,1]$ et ainsi

$$\lim_{r\to 1}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nt)}{n}r^n = \sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nt)}{n}.$$

Dans la preuve du 1., nous avons établi que $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nt)}{n}r^n = \arctan\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nt)}{n} &= \arctan\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\\ &= \arctan\left(\frac{2\sin(t/2)\cos(t/2)}{1-\cos^2(t/2)+\sin^2(t/2)}\right)\\ &= \arctan(1/\tan(t/2))\\ &= \arctan(\tan(\pi/2-t/2))\\ &= \frac{\pi-t}{2}.\end{aligned}$$

3. On remarque que

$$\begin{aligned}\|G_n\|_\infty &\geq G_n(\pi/n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\pi/n)}{k} \\ &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\pi/n)}{k\pi/n} \\ &\geq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = 1,85... \\ &> \frac{\pi}{2} = \|G\|_\infty.\end{aligned}$$

□

Le noyau de Jackson

Pour $n \geq$ entier, le *noyau de Jackson* d'ordre n est défini par

$$J_n(e^{it}) = \frac{K_n^2}{\|K_n^2\|_1} = \frac{K_n^2}{\|K_n\|_2^2}.$$

Comme le noyau de Fejér est positif, il est de même pour le noyau de Jackson. Par défintion on a aussi $\|J_n\|_1 = 1$. On peut aussi remarquer que comme le noyau de Fejér d'ordre n est un polynôme trigonométrique d'ordre n, le noyau de Jackson d'ordre n est un polynôme trigonométrique d'ordre $2n$.

La proposition suivante donne une estimation sur le noyau de Jackson utile pour les applications. Cette estimation pour $k = 1, 2$ n'est pas vraie pour le noyau de Fejér et cela justifie pour certaines applications l'introduction du noyau de Jackson.

Proposition 4.1.14 *Pour $k = 0, 1, 2$, on a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|^k J_n(e^{it}) dt = O\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Preuve : Rappelons que si $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, la concavité de la fonction sinus, et le fait que la dérivée du sinus soit cosinus (majoré par 1) donnent

$$\frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t.$$

Grâce à l'expression du noyau de Fejér, on va en déduire que $\|K_n^2\|_1 \geq an$, où a est une constante numérique positive. En effet,

$$\begin{aligned}
\|K_n^2\|_1 &= \frac{1}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4 dt = \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin(nt)}{\sin t}\right)^4 dt \\
&= \frac{2}{\pi n^3}\int_0^{n\pi/2}\left(\frac{\sin(u)}{\sin(u/n)}\right)^4 dt \geq \frac{2}{\pi} n\int_0^{n\pi/2}\left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^4 du \\
&\geq \frac{2}{\pi} n\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^4 du \\
&\geq an,
\end{aligned}$$

avec $a = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^4 du$.

Par conséquent, pour $0 < k < 3$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^k J_n(e^{it})dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^k J_n(e^{it})dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{t^k}{n^2\|K_n^2\|_1}\frac{(\sin(nt/2))^4}{(\sin(t/2))^4}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{2^{k+1}u^k}{n^2\|K_n^2\|_1}\frac{\sin(nu)^4}{(\sin u)^4}du \\
&\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{2^{k+1}u^k}{n^2\|K_n^2\|_1}\frac{\sin(nu)^4}{u^4 2^4/\pi^4}du \\
&= \frac{\pi^3}{2^{3-k}}\int_0^{\pi/2}\frac{(\sin(nu))^4}{n^2\|K_n^2\|_1 u^{4-k}}du \\
&\leq \frac{\pi^3 2^{k-3}}{an^3}\int_0^{\pi/2}\frac{(\sin(nu))^4}{u^{4-k}}du \\
&= \frac{\pi^3 2^{k-3}}{an^3}\int_0^{n\pi/2} n^{4-k}\frac{(\sin v)^4}{v^{4-k}}dv/n \\
&= \frac{C}{n^k}\int_0^{n\pi/2}\frac{(\sin v)^4}{v^{4-k}}dv.
\end{aligned}$$

ce qui prouve ce que l'on veut car $\int_0^{\infty}\frac{(\sin u)^4}{u^{4-k}}du < \infty$ si $0 \leq k < 3$.

□

Remarques sur les fonctions paires et impaires

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Si f est paire,

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt.$$

De plus, lorsque f est paire,

$$S_n(f)(e^{it}) = \widehat{f}(0)+2\sum_{k=1}^{n}\widehat{f}(k)\cos(kt) \quad \text{et} \quad \sigma_n(f)(e^{it}) = \widehat{f}(0)+2\sum_{k=1}^{n}(1-k/n)\widehat{f}(k)\cos(kt).$$

Si f est impaire,

$$\widehat{f}(n) = \frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

De plus, lorsque f est impaire,

$$S_n(f)(e^{it}) = 2i\sum_{k=1}^{n}\widehat{f}(k)\sin(kt) \quad \text{et} \quad \sigma_n(f)(e^{it}) = 2i\sum_{k=1}^{n}(1-k/n)\widehat{f}(k)\sin(kt).$$

4.1.6 Les principaux théorèmes de convergence

Résultats de convergence de Fejér

On commence par un contre-exemple, révélateur des difficultés que l'on peut rencontrer en théorie des séries de Fourier.

Théorème 4.1.15 (Contre-exemple de Fejér) *Il existe une fonction continue sur $\mathbb{T}$ telle que $\sup_n |S_n(f)(1)| = \infty$. En particulier, la suite des sommes de Fourier de f diverge en 1.*

Preuve : On va donner un exemple explicite basé sur une construction assez souple qui permet de donner des exemples variés.

Soit $(n_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{N}^*$ et soit $(\alpha_k)_{k\geq 1} \subset]0,\infty[$ tels que

$$n_{k+1} > 3n_k, \quad \sum_{k\geq 1}\alpha_k < \infty, \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty}\alpha_k \ln n_k = \infty.$$

(Un choix possible est $n_k = 2^{k^2}$ et $\alpha_k = \frac{1}{k^a}$ avec $1 < a < 2$; en effet $\frac{n_{k+1}}{n_k} = 2^{2k+1} \geq 8 > 3$ et $\alpha_k \ln n_k = k^{2-a}\ln 2$.)

Posons

$$P_k(e^{it}) = e^{2in_kt}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{\sin jt}{j} = e^{2in_kt}G_{n_k}(e^{it}).$$

On remarque que $Sp(P_k) \subset [n_k, 3n_k]$. En effet,

$$P_k(e^{it}) = \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{e^{i(2n_k+j)t} - e^{i(2n_k-j)t}}{j},$$

avec $2n_k + j$ (resp. $2n_k - j$) qui parcourt $[2n_k + 1, 3n_k]$ (resp. $[n_k, 2n_k - 1]$) quand j parcourt $[1, n_k]$. Comme $n_{k+1} > 3n_k$, on en déduit

$$\max Sp(P_k) < \min Sp(P_{k+1})$$

(familièrement on dirait que P_{k+1} commence quand P_k finit). Posons

$$f = \sum_{k\geq 1} \alpha_k P_k.$$

D'après la proposition 4.1.13, $\|P_k\|_\infty = \|G_{n_k}\|_\infty \leq 1 + \frac{\pi}{2}$. Comme $\sum_k \alpha_k < \infty$, la série $\sum_{k\geq 1} \alpha_k P_k$ est normalement convergente dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, ce qui implique que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ avec $\widehat{f}(n) = \sum_{k\geq 1} \alpha_k \widehat{P_k}(n)$. On en déduit

$$\begin{cases} \widehat{f}(n) = \alpha_k \widehat{P_k}(n) & \text{s'il existe } k \text{ tel que } n_k \leq n \leq 3n_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant le fait que

$$P_k(e^{it}) = \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{e^{i(2n_k+j)t} - e^{i(2n_k-j)t}}{j},$$

avec $2n_k + j$ (resp. $2n_k - j$) qui parcourt $[2n_k + 1, 3n_k]$ (resp. $[n_k, 2n_k - 1]$) quand j parcourt $[1, n_k]$, on obtient pour $k \geq 2$:

$$S_{2n_k}(f)(e^{it}) = \alpha_1 P_1(e^{it}) + \cdots + \alpha_{k-1} P_{k-1}(e^{it}) - \frac{\alpha_k}{2i} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{e^{i(2n_k-j)t}}{j}.$$

En particulier,

$$S_{2n_k}(f)(1) = \alpha_1 P_1(1) + \cdots + \alpha_{k-1} P_{k-1}(1) - \frac{\alpha_k}{2i} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{1}{j}.$$

D'après l'équivalent classique

$$\sum_{j=1}^{n_k} \frac{1}{j} \sim \ln n_k \quad \text{si} \quad k \to \infty,$$

pour k assez grand, on obtient

$$\begin{aligned} |S_{2n_k}(f)(1)| &\geq \frac{\alpha_k}{2} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{1}{j} - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k_1}) \\ &\geq \frac{\alpha_k}{4} \ln n_k - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \sum_{j\geq 1} \alpha_j. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{k\to\infty} \alpha_k \ln n_k = \infty$, on obtient

$$\lim_{k\to\infty} |S_{2n_k}(f)(1)| = \infty.$$

$\square$

Presque au même moment où il donnait son contre-exemple, Fejér a montré comment contourner la difficulté et a énoncé un résultat positif d'une très grande généralité et utilité.

Théorème 4.1.16 (Théorème de convergence de Fejér)

1. *Soit* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. *Alors* $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ *pour tout* $n \geq 1$ *et* $\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0$.
2. *Soit* $f \in L^p(\mathbb{T})$ *avec* $1 \leq p < \infty$. *Alors* $\|\sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$ *pour tout* $n \geq 1$ *et* $\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0$.

Preuve : 1. Soit $\delta \in]0, \pi[$ et soit

$$\omega(\delta) = \sup\{|f(e^{iu}) - f(e^{iv})| : |u - v| \leq \delta\}.$$

D'après la proposition 4.1.12,

$$\|\sigma_n(f)\|_\infty = \|f \star K_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|K_n\|_1 = \|f\|_\infty.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. La proposition 4.1.12 entraîne :

$$\begin{aligned} f(e^{it}) - \sigma_n(f)(e^{it}) &= f(e^{it}) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i(t-u)})K_n(e^{iu})du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(e^{it}) - f(e^{i(t-u)}))K_n(e^{iu})du. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |f(e^{it}) - \sigma_n(f)(e^{it})| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} |f(e^{it}) - f(e^{i(t-u)})|K_n(e^{iu})du \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\leq\pi} |f(e^{it}) - f(e^{i(t-u)})|K_n(e^{iu})du \\ &\leq \frac{w(\delta)}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} K_n(e^{iu})du + 2\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\leq\delta} K_n(e^{iu})du \\ &\leq \frac{w(\delta)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(e^{iu})du + \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin^2(\delta/2)}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\|f-\sigma_n(f)\|_\infty \leq w(\delta) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin^2(\delta/2)}.$$

Par conséquent

$$\limsup_{n\to\infty} \|f-\sigma_n(f)\|_\infty \leq w(\delta).$$

En passant à la limite quand $\delta \to 0$ dans cette inégalité et en utilisant la continuité uniforme de f sur $\mathbb{T}$, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \|f-\sigma_n(f)\|_\infty = 0,$$

qui implique

$$\limsup_{n\to\infty} \|f-\sigma_n(f)\|_\infty = 0.$$

2. La clé de la preuve est la positivité de K_n. D'après l'inégalité de Hölder appliquée à la mesure de probabilité (i.e. positive et de masse 1) $\frac{K_n(e^{it})}{2\pi}dt$, on obtient :

$$|\sigma_n(f)(e^{it})|^p = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i(t-u)})K_n(e^{iu})du\right|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i(t-u)})|^p K_n(e^{iu})du.$$

En intégrant par rapport à t et en utilisant le théorème de Fubini–Tonelli, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\sigma_n(f)\|_p^p &\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(e^{iu})\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i(t-u)})|^p dt\right)du \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(e^{iu})\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^p dt\right)du \\
&= \|K_n\|_1\|f\|_p^p = \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

On a donc montré que $\|\sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$. Le même calcul appliqué cette fois à

$$f(e^{it}) - \sigma_n(f)(e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(e^{it}) - f(e^{i(t-u)})K_n(u)du$$

conduit à

$$\begin{aligned}
\|f-\sigma_n(f)\|_p^p &\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(e^{iu})\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it}) - f(e^{i(t-u)})|^p dt\right)du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(e^{iu})g(e^{-iu})du = \sigma_n(g)(1),
\end{aligned}$$

avec $g(e^{iu}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{it}) - f(e^{i(t-u)})|^p dt = \|f - \tau_u f\|_p^p$ où $\tau_u f(e^{it}) = f(e^{i(t+u)})$. Or, via le théorème de convergence dominée de Lebesgue on montre aisément que g est continue sur $\mathbb{T}$. D'aprés le premier point du théorème de Fejér, $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(g)(1) = g(1) = 0$, et donc $\lim_{n\to\infty}\|f - \sigma_n(f)\|_p = 0$.

□

Voici à présent un théorème donnant quelques applications très utiles.

Si E est un sous-espace vectoriel de $L^1(\mathbb{T})$ et si $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, on pose $E_\Lambda = \{f \in E : Sp(f) \subset \Lambda\}$. On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques.

Théorème 4.1.17 *1. Pour toute partie $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}_\Lambda$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})_\Lambda$ (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$). En particulier, $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$).*

2. *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $S_n(f)(e^{ix_0}) \to \ell$, alors $\ell = f(e^{ix_0})$.*

3. *Si la série de Fourier de $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ converge uniformément, alors $f(e^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{int}$. En particulier, si $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)| < \infty$, f est égal à sa série de Fourier.*

4. *$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de $L^2(\mathbb{T})$. En particulier, pour f $inL^2(\mathbb{T})$,*
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2 \quad et \quad \|S_n(f) - f\|_2 \to 0.$$

5. *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, f C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier converge normalement et $f(e^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{int}$.*

6. *Si $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ avec $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = g$. Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ avec $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = g$ presque partout.*

7. ***Théorème de Weierstrass** : toute fonction continue sur un intervalle compact $[a, b]$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes* algébriques.

Preuve : 1. Soit $f \in \mathcal{C}_\Lambda$. On remarque que $\sigma_n(f) = \sum_{k=-n}^{n}(1 - |k|/n)\widehat{f}(k)e_k \in \mathcal{P}_\Lambda$ car si $k \notin \Lambda$, $\widehat{\sigma_n(f)}(k) = 0$ si $|k| \le n$ et $\widehat{\sigma_n(f)}(k) = 0$ si $|k| > n$. De plus

$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \to 0$ d'après le théorème de Fejér. Donc f est dans l'adhérence de $\mathcal{P}_\Lambda$.

2. Si $S_n(f)(e^{ix_0}) \to \ell$, le théorème de Césaro entraîne que :

$$\sigma_n(f)(e^{ix_0}) = \frac{S_0(f)(e^{ix_0}) + \cdots + S_{n-1}(f)(e^{ix_0})}{n} \to \ell.$$

Or, comme f est continue, d'après le théorème de Fejér $\sigma_n(f)(e^{ix_0}) \to f(e^{ix_0})$. On a donc $S_n(f)(e^{ix_0}) \to f(e^{ix_0}) = \ell$.

3. Comme $S_n(f)$ converge uniformément, et f continue, le résultat découle de 2.

4. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. D'après la théorie de l'intégrale de Lebesgue, $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$. D'après 1., $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ pour la norme infini, ce qui implique aussi la densité pour la norme 2. Par conséquent $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$. Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système orthonormal, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est en fait une base orthonormale de $L^2(\mathbb{T})$. D'après la formule de Parseval, $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_n\rangle|^2$, et donc $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$. De plus, d'après la théorie des espaces de Hilbert, $\sum_{-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k \to f$ dans $L^2(\mathbb{T})$. Autrement dit $S_n(f) \to f$ dans $L^2(\mathbb{T})$, ce qui est plus précis que le théorème de Fejér pour $p = 2$.

5. Soit f continue et C^1 par morceaux. D'après le lemme 4.1.2, $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$. Comme f' est continue par morceaux, en particulier f' est dans $L^2(\mathbb{T})$. D'après 4. on a donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |\widehat{f}(n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f'}(n)|^2 = \|f'\|_2^2.$$

L'inégalité de Cauchy–Schwarz donne alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le|k|\le n} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{1\le|k|\le n} \frac{1}{|k|} |k\widehat{f}(k)| \\
&\le \left(\sum_{1\le|k|\le n} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{1\le|k|\le n} k^2 |\widehat{f}(k)|^2\right)^{1/2} \\
&\le \left(2\sum_{k\ge1} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \|f'\|_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \|f'\|_2.
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers ∞, on obtient que la série de Fourier de f est normalement convergente avec

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \leq \widehat{f}(0) + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\|f'\|_2.$$

6. Si f et g sont continues (resp. dans $L^1(\mathbb{T})$) et si leurs coefficients de Fourier coïncident, alors $\sigma_n(f) = \sigma_n(g)$. En utilisant le fait que

$$\|f - g\| \leq \|f - \sigma_n(f)\| + \|g - \sigma_n(g)\|,$$

en prenant la norme infini ou la norme 1 et en passant à la limite, via le théorème de Fejér, on obtient $f = g$ si f et g sont continues, et $f = g$ presque partout si f et g sont simplement intégrables.

7. Il suffit de considérer le cas de l'intervalle $[-1, 1]$. En effet, si F est continue sur $[a, b]$, alors on considère h définie sur $[-1, 1]$ par $F(t) = h\left(\frac{-2t+(a+b)}{a-b}\right)$. Prenons donc F continue sur $[-1, 1]$ et considérons $f = F(\cos t)$. Alors f est paire et donc $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$. D'où

$$\begin{aligned}\sigma_n(f) &= \widehat{f}(0)e_0 + \sum_{k=1}^{n}(1 - k/n)\widehat{f}(k)(e_k + e_{-k}) \\ &= \widehat{f}(0)e_0 + 2\sum_{k=1}^{n}(1 - k/n)\widehat{f}(k)\cos kt.\end{aligned}$$

Rappelons qu'il existe un polynôme T_k tel que $T_k(\cos t) = \cos(kt)$. En effet, d'après la formule de Moivre et de Newton,

$$\cos(kt) + i\sin(kt) = (\cos t + i\sin t)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j(\cos t)^{k-j}i^j(\sin t)^j.$$

En prenant les parties réelles des deux membres de l'égalité, on a :

$$\cos kt = \sum_{0\leq j\leq E(k/2)} C_k^{2j}(\cos t)^{k-2j}(-1)^j(1 - \cos^2 t)^j = T_k(\cos t),$$

où $T_k(x) = \sum_{0\leq j\leq E(k/2)} C_k^{2j}x^{k-2j}(-1)^j(1 - x^2)^j$. Par conséquent

$$\sigma_n(f)(t) = P_n(\cos t),$$

où $P_n = \widehat{f}(0) + 2\sum_{k=1}^{n}(1-k/n)\widehat{f}(k)T_k$. Puisque $x = \cos t$ parcourt $[-1,1]$ quand t parcourt $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{-1\le x\le 1} |F(x) - P_n(x)| &= \sup_{t\in\mathbb{R}} |F(\cos t) - P_n(\cos t)| \\
&= \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - \sigma_n(f)(t)| \\
&= \sup_{\xi\in\mathbb{T}} |g(\xi) - \sigma_n(g)(\xi)|,
\end{aligned}$$

où $g(e^{it}) = f(t)$. Comme g est continue sur $\mathbb{T}$, d'après le théorème de Fejér, $\|g - \sigma_n(g)\|_\infty \to 0$, et donc F est limite uniforme de polynômes algébriques.

$\square$

Résultats de convergence de Dirichlet

Le théorème de Dirichlet est à la fois plus fin (résultat ponctuel) et moins intéressant que le théorème de Fejér qui lui est valable pour des fonctions continues ou dans L^p avec une convergence en norme ; mais le mérite de l'énoncé du théorème de Dirichlet et de faire intervenir directement les sommes partielles $S_n(f)$ au lieu de leurs moyennes arithmétiques $\sigma_n(f)$, et aussi de considérer des fonctions qui ne sont pas nécessairement continues.

Théorème 4.1.18 (Théorème de Dirichlet) *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Supposons que*

$$\lim_{t\to 0, t>0} f(e^{i(t_0+t)}) =: f^+ \quad \textit{et} \quad \lim_{t\to 0, t<0} f(e^{i(t_0+t)}) =: f^- \quad \textit{existent.}$$

Supposons aussi qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\int_0^\delta \frac{|f(e^{i(t_0+t)}) - f^+|}{t} dt < \infty \quad \textit{et} \quad \int_0^\delta \frac{|f(e^{i(t_0-t)}) - f^-|}{t} dt < \infty.$$

Alors on a :

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(e^{it_0}) = \frac{1}{2}(f^+ + f^-).$$

Preuve : Par translation on peut supposer que $t_0 = 0$. D'après la proposition 4.1.10, on a

$$\begin{aligned} S_n(f)(1) - \frac{1}{2}(f^+ - f^-) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{-it})D_n(e^{it})dt - \frac{1}{2}(f^+ - f^-) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} |f(e^{it}) + f(e^{-it}) - f^+ - f^-|D_n(e^{it})|dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} h(t)\sin((n+1/2)t)dt \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$h(t) = \frac{f(e^{it}) + f(e^{-it}) - f^+ - f^-}{\sin(t/2)}$$

pour $0 < t \leq \pi$. Les hypothèses du théorème de Dirichlet garantissent que $h \in L^1([0, \pi])$. D'après le lemme de Riemann–Lebesgue, $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} h(t)\sin((n + 1/2)t)dt = 0$, ce qui prouve le théorème.

□

4.1.7 Le phénomène de Gibbs

Lors de l'étude des séries de Fourier et des transformées de Fourier, il apparaît parfois une déformation du signal, connue sous le nom de *phénomène de Gibbs.* Ce phénomène est un *effet de bord* qui se produit à proximité d'une discontinuité, lors de l'analyse d'une fonction dérivable par morceaux.

Le phénomène fut mis pour la première fois en évidence en 1848 par Henry Wilbraham, mais cette découverte ne connut guère d'écho. En 1898 Albert Michelson développa un système mécanique capable de calculer et sommer la série de Fourier d'un signal donné en entrée. Il observa alors un effet d'amplification des discontinuités, qui persistait malgré l'augmentation du nombre de coefficients calculés. Alors que Michelson soupçonnait un défaut dans la fabrication de son engin, Josiah Willard Gibbs montra que le phénomène était d'origine mathématique et se produisait dans des conditions très générales. En 1906, Maxime Bôcher donna la première interprétation satisfaisante du phénomène auquel il donna le nom de phénomène de Gibbs.

Le phénomène de Gibbs est, en quelque sorte, un *défaut d'approximation* pour une fonction continue de classe C^1 par morceaux. Pour une telle fonction f, le théorème de Dirichlet sur la convergence des séries de Fourier assure que la série de Fourier de f converge simplement vers la fonction f sur l'intervalle où f est C^1 par morceaux. En tout point de continuité la somme de la série de Fourier est $f(x)$. Les sommes partielles de la série de Fourier sont des fonctions continues, il est donc normal qu'elles ne puissent approcher uniformément la fonction aux points de discontinuité. Précisément, sur un segment sur lequel f est dérivable, on observe une convergence uniforme, conformément au théorème de Weierstrass trigonométrique (c'est le cas des zones de *plateau* dans l'exemple de la fonction créneau). Au niveau du point de discontinuité x, $S_n(f)$ subit une forte *oscillation*, une sorte de *ressaut* qui se mesure en comparant les valeurs en $x - \frac{\pi}{n}$ et $x + \frac{\pi}{n}$. En effet, toujours d'après le théorème de Dirichlet sur la convergence des séries de Fourier, la série de Fourier de f converge aussi simplement aux points de discontinuités mais vers la régularisée de Dirichlet, i.e. la demi-somme des valeurs de f de part et d'autre du point de dicontinuités. Lorsque n devient grand, l'amplitude de ces oscillations tend vers une limite strictement plus grande que l'amplitude de la discontinuité, alors que la largeur de la zone d'oscillation tend vers 0. Il est remarquable que le phénomène s'exprime quantitativement de façon indépendante de la fonction considérée. Si la fonction a une discontinuité d'amplitude Δy, alors $S_n(f)$, tout en restant continue, connaitra un ressaut en ordonnée valant de l'ordre de 18% de plus au voisinage de la discontinuité.

4.1.8 Applications

Il existe de très nombreuses applications des séries de Fourier telle que *l'inégalité isopérimétrique*, la résolution d'équations aux dérivées partielles telle que *l'équation des ondes...*

Nous détaillerons ici trois applications, à savoir *l'inégalité de Bernstein*, la construction de *fonctions continues partout sans dérivée* et enfin *l'équation de la chaleur* qui à elle seule a motivé Fourier pour l'introduction des séries de Fourier.

Inégalité de Bernstein

Dans le théorème suivant on considère une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée est aussi bornée, mais non périodique. Elle est dite “presque périodique”.

Théorème 4.1.19 *Soit $\lambda > 0$, et soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ distincts et tels que* $\max|\lambda_j| \leq \lambda$. *Soient $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ et $h(t) = \sum_{j=1}^n a_j e^{i\lambda_j t}$. Alors*

$$\|h'\|_\infty \leq \lambda \|h\|_\infty,$$

la norme $\|\cdot\|_\infty$ étant le sup *sur $\mathbb{R}$.*

Preuve : Supposons d'abord que $\lambda = \pi/2$. Alors

$$h'(t) = \sum_{j=1}^n i\lambda_j a_j e^{i\lambda_j t} = \sum_{j=1}^n iS(\lambda_j) a_j e^{i\lambda_j t},$$

où S est la fonction triangle décalée de l'exercice 4.2.5. Puisque la série de Fourier de S converge normalement sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(t) &= \sum_{j=1}^n i\lambda_j a_j e^{i\lambda_j t} = \sum_{j=1}^n i a_j e^{i\lambda_j t} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{S}(k) e^{ik\lambda_j} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} ic_k(S) \left(\sum_{j=1}^n a_j e^{i\lambda_j (t+k)} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} ic_k(S) h(t+k). \end{aligned}$$

Autrement dit, en posant $d_k = ic_k$, on obtient

$$h'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k h(t+k) \quad \text{avec} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_k| = \frac{\pi}{2}.$$

Ceci entraîne immédiatement que

$$\|h'\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} \|h\|_\infty.$$

Pour $\lambda > 0$ quelconque, posons

$$\alpha = \frac{\pi}{2\lambda} \quad \text{et} \quad \varphi(t) = h(\alpha t).$$

Comme $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} a_j e^{i(\lambda_j \alpha)t}$ avec $|\lambda_j \alpha| \leq \frac{\pi}{2}$, d'après le cas précédent, $\|\varphi'\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}\|\varphi\|_\infty$, c'est-à-dire, $\alpha\|h'\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}\|h\|_\infty$, et ainsi $\|h'\|_\infty \leq \lambda\|h\|_\infty$.

□

Fonctions continues partout sans dérivée

Les séries de Fourier permettent de donner de nombreux exemples de fonctions continues partout non dérivables, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 4.1.20 *Soit $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{C}$ telle que $\sum_{n\geq 0} |\epsilon_n| < \infty$. Soit q un réel > 1, et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers strictement positifs telle que $\lambda_{n+1} \geq q\lambda_n$ pour tout $n \geq 1$. Soit f défini par*

$$f(t) = \epsilon_0 + \sum_{n\geq 1} \epsilon_n e^{i\lambda_n t}.$$

Si f est dérivable en $t_0 \in \mathbb{R}$, alors

$$\epsilon_n = o(\lambda_n^{-1}) \quad \textit{quand} \quad n \to \infty.$$

En particulier,

$$f(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{i\lambda_n t}}{\lambda_n}$$

est partout non dérivable.

La preuve va s'appuyer sur les deux lemmes suivants.

Lemme 4.1.21 *Soit $n \geq 2$. Alors pour tout k tel que $0 < |k| < \min(\lambda_{n+1} - \lambda_n, \lambda_n - \lambda_{n-1})$, on a $\widehat{f}(\lambda_n - k) = 0$.*

Preuve : Par définition de f, le spectre de f est inclus dans $\{0\} \cup \{\lambda_j : j \geq 1\}$. Pour k tel que $0 < |k| < \min(\lambda_{n+1} - \lambda_n, \lambda_n - \lambda_{n-1})$, on a $\lambda_n - k \neq \lambda_n$ et

$\lambda_n - k < \lambda_n + \lambda_{n+1} - \lambda_n = \lambda_{n+1}$. D'autre part, $\lambda_n - k > \lambda_n - (\lambda_n - \lambda_{n-1}) = \lambda_{n-1}$. Ainsi $\lambda_n - k \notin Sp(f)$.

□

Lemme 4.1.22 *Soit $\rho = 1 - 1/q$, $n \geq 2$ un entier et p un entier tel que $1 \leq p < \rho\frac{\lambda_n}{2}$. Alors*

$$\epsilon_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)J_p(e^{it})e^{-i\lambda_n t}dt,$$

où J_p est le noyau de Jackson *d'ordre p défini à partir du noyau de Fejér d'ordre p par $J_p = K_p^2/\|K_p\|_1^2$.*

Preuve : Notons tout d'abord que $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq (q-1)\lambda_n \geq (1-1/q)\lambda_n = \rho\lambda_n$ et $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geq \lambda_n - \frac{\lambda_n}{q} = \rho\lambda_n$. On a donc

$$2p < \rho\lambda_n \leq \min(\lambda_{n+1} - \lambda_n, \lambda_n - \lambda_{n-1}).$$

D'après le lemme 4.1.21, on a donc $\widehat{f}(\lambda_n - k) = 0$, pour tout $0 < |k| \leq 2p$.

De plus J_p est de la forme $J_p(e^{it}) = 1 + \sum_{0<|k|\leq 2p} \alpha_k e_k$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)J_p(e^{it})e^{-i\lambda_n t}dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i\lambda_n t}dt \\
&\quad + \sum_{0<|k|\leq 2p} \alpha_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{i(k-\lambda_n)t}dt \\
&= \widehat{f}(\lambda_n) + \sum_{0<|k|\leq 2p} \alpha_k \widehat{f}(\lambda_n - k) \\
&= \widehat{f}(\lambda_n) \\
&= \epsilon_n.
\end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 4.1.20 : Suposons d'abord que $t_0 = 0$, $f(t_0) = 0$ et $f'(t_0) = 0$. Soit $n_0 \geq 2$ un entier tel que :

$$n \geq n_0 \Rightarrow E(\rho\lambda_n/2) - 1 \geq 1.$$

Soit $\epsilon > 0$. D'après les hypothèses sur f, il existe $\delta \in]0, \pi[$ tel que

$$|t| \leq \delta \Rightarrow |f(t)| \leq \epsilon|t|.$$

Pour $n \geq n_0$, posons

$$p_n = E(\rho\lambda_n/2) - 1.$$

Soit $n \geq n_0$. Puisque $p_n < \rho\lambda_n/2$, le lemme 4.1.22 entraîne que :

$$\epsilon_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)J_{p_n}(t)e^{-i\lambda_n t}dt.$$

Par définition de δ, on en déduit :

$$\begin{aligned}
|\epsilon_n| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} |f(t)|J_{p_n}(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\leq\pi} |f(t)|J_{p_n}(t)dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} \epsilon|t|J_{p_n}(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\leq\pi} \frac{t^2}{\delta^2}\|f\|_\infty J_{p_n}(t)dt \\
&\leq \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|J_{p_n}(t)dt + \frac{\|f\|_\infty}{\delta^2}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 J_{p_n}(t)\frac{dt}{2\pi} \\
&\leq M\left(\frac{\epsilon}{p_n} + \frac{\|f\|_\infty}{\delta^2 p_n^2}\right),
\end{aligned}$$

où M est une constante numérique dont l'existence est assurée par la proposition 4.1.14. D'où :

$$p_n|\epsilon_n| \leq M\epsilon + \frac{M\|f\|_\infty}{\delta^2 p_n}.$$

On en déduit $\limsup_{n\to\infty} p_n|\epsilon_n| \leq M\epsilon$, et donc $\lim_{n\to\infty} p_n\epsilon_n = 0$ car ϵ est arbitrairement petit. Comme $p_n \equiv \rho\frac{p_n}{2}$, on a aussi $\lim_{n\to\infty}\lambda_n\epsilon_n = 0$ dans le cas particulier où $t_0 = 0$, avec $f(t_0) = 0 = f'(t_0)$.

Dans le cas général, soit

$$g(t) = f(t+t_0) - f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{i\lambda_1} - \frac{f'(t_0)}{i\lambda_1}e^{i\lambda_1 t}.$$

On remarque que g est de la forme

$$g(t) = \epsilon_0' + \epsilon_1' e^{i\lambda_1 t} + \sum_{n=2}^{\infty} \epsilon_n e^{i\lambda_n t_0} e^{i\lambda_n t}.$$

De plus $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$. D'après ce qui précède, on a donc

$$\epsilon_n e^{i\lambda_n t_0} = o\left(\frac{1}{\lambda_n}\right).$$

Comme $|\epsilon_n e^{i\lambda_n t_0}| = |\epsilon_n|$, on obtient le résultat annoncé.

□

4.1.9 Equation de la chaleur

Le problème est le suivant. Considérons une barre métallique. Connaissant, à l'instant initial, la température en chaque point de la barre et, à tout instant, la température aux deux extrémités, peut-on déterminer, à tout moment et en tout point, la température de la barre ? Ce problème a été modélisé et la température u qui est une fonction du temps t et du point x est solution d'une *équation de la chaleur* (voir ci-dessous). On peut résoudre ce problème dans un cas simple, à l'aide des séries de Fourier. On peut supposer que la barre est le segment $[0, L]$. Notons $Q =]0, L[\times]0, \infty[$, $\overline{Q} = [0, L] \times [0, \infty[$.

Le problème à résoudre est le suivant :

Trouver une fonction u telle que u est continue sur $\overline{Q}$, $u \in C^2(Q)$ et

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans} \quad Q, \tag{4.1}$$

avec

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \in [0, \infty[\quad \text{et} \quad u(x, 0) = h(x), \quad x \in [0, L],$$

où h est une fonction C^1 sur l'intervalle **fermé** $[0, L]$ telle que $h(0) = h(L) = 0$ (nécessaire d'après l'hypothèse $u(0, t) = u(L, t) = 0$). La série de Fourier de h sera donc normalement convergente. L'idée de départ est de chercher une solution de la forme $u(x, t) = f(x)g(t)$. Alors (4.1) est équivalente à

$$f(x)g'(t) = f''(x)g(t).$$

Cherchons une solution telle que $u(x, t) \neq 0$ pour tout $x \in]0, L[$ et pour tout $t \in]0, \infty[$. L'égalité ci-dessus est alors équivalente à

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)}, \quad \forall x \in]0, L[, \quad \forall t \in]0, \infty[.$$

Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f''(x) = \lambda f(x), \quad x \in]0, L[\tag{4.2}$$

et

$$g'(t) = \lambda g(t), \quad t \in]0, \infty[. \tag{4.3}$$

Si $\lambda > 0$, la solution générale de (4.2) est

$$f(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

La condition $u(0,t) = u(L,t) = 0$ conduit à $A+B = 0$ et $Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{-\sqrt{\lambda}L} = 0$. On obtient $A = B = u(x,t) = 0$, ce qui ne convient pas à la condition $u(x,0) = h(x)$. De même, si $\lambda = 0$, on a $f(x) = Ax + B$ et d'après $u(0,t) = u(L,t) = 0$, on obtient de nouveau $u \equiv 0$.

Considérons enfin le cas où $\lambda = -\xi^2 < 0$. Alors

$$f(x) = A\cos\xi x + B\sin\xi x \quad \text{et} \quad g(t) = Ce^{-\xi^2 t}.$$

La condition $u(0,t) = 0$ conduit à $A = 0$ et $u(L,t) = 0$ donne $B\sin\xi L = 0$, et donc $\xi = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$. On a donc une famille de solutions de la forme

$$u_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

Le problème est que ces solutions n'ont aucune raison de satisfaire $u(x,0) = h(x)$ pour tout $x \in [0,L]$. Cependant comme l'équation (4.1) est linéaire, une somme de telles u_n est encore une solution. L'idée est alors de prendre une somme infinie et de poser :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

Si l'on peut dériver u sous le signe somme, elle vérifiera bien l'équation (4.1) car chaque u_n la vérifie. De plus $u(0,t) = u(L,t) = 0$ est trivialement vérifié. Pour savoir ce que l'on a gagné, examinons l'égalité $u(x,0) = h(x)$, qui devient

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Cette égalité traduit le fait que les b_n doivent être les coefficients de Fourier d'une fonction $\widetilde{h}$ égale à h sur $[0,L]$ et que la série de Fourier de $\widetilde{h}$ converge vers $\widetilde{h}$ sur $[0,L]$. La voie est donc tracée !

Soit h_1 la fonction définie sur $[-L, L]$ par

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si} \quad x \in [0, L] \\ -h(-x) & \text{si} \quad x \in [-L, 0] \end{cases}$$

Comme $h(0) = 0$, la fonction h_1 est de classe C^1 sur $[-L, L]$. Soit $\widetilde{h}$ la fonction $2L$-périodique sur $\mathbb{R}$ égale à h_1 sur $[-L, L]$. Comme $h(L) = 0$, la fonction $\widetilde{h}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux. D'après le théorème 4.1.17, on a

$$\widetilde{h}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

La fonction u définie par

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

est continue sur $\overline{Q}$. Montrons qu'elle est en fait C^∞ sur Q et que l'on peut dériver sous le signe somme. Pour cela il suffit de montrer que les séries dérivées convergent uniformément sur tout compact de Q.

Si $t \in [\varepsilon, M]$, $\quad \epsilon > 0$, le terme général de la série dérivée d'ordre k est majoré en valeur absolue par

$$C_k |b_n| n^{2k} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\epsilon},$$

qui est le terme général d'une série convergente. Il y a donc convergence normale, ce qui montre que $u \in C^\infty(Q)$. On a donc prouvé **l'existence** d'une solution à notre problème.

Que peut-on dire de **l'unicité** ?

Pour conclure, nous avons besoin du lemme suivant, qui est un principe du maximum.

Lemme 4.1.23 (Principe du maximum pour l'équation de la chaleur) *Soit u une fonction continue sur $\overline{Q}$ et C^2 sur Q, telle que $Pu(x,t) \geq 0$ sur Q, où*

$P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}$. *Soit* $T > 0$ *et* $K = [0, L] \times [0, T]$. *Alors*

$$\sup_K u = \sup_{K \cap \partial Q} u.$$

Autrement dit, u *atteint son max pour* $t = 0$ *ou pour* $x \in \{0, L\}$ *et* $0 \leq t \leq L$.

Preuve : Soit $\epsilon > 0$ et $u_\epsilon(x, t) = u(x, t) + \epsilon x^2$, qui vérifie $Pu_\epsilon = Pu + 2\epsilon \geq 2\epsilon$ sur Q. Soit $m_\epsilon = (x_\epsilon, t_\epsilon)$ un point de K où u_ϵ atteint son maximum sur K. Supposons que $m_\epsilon \notin K \cap \partial Q$. Alors

$$x_\epsilon \in]0, L[, \quad \text{donc} \quad \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}(\epsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x^2}(m_\epsilon) \leq 0.$$

De plus, comme $0 < t_\epsilon \leq T$, on a

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}(m_\epsilon) = \lim_{h \to 0, h > 0} \frac{u_\epsilon(x_\epsilon, t_\epsilon - h) - u_\epsilon(x_\epsilon, t_\epsilon)}{-h} \geq 0.$$

On en déduit alors que $Pu_\epsilon(m_\epsilon) \leq 0$, ce qui contredit le fait que $Pu_\epsilon \geq 2\epsilon$ sur Q. Donc $m_\epsilon \in K \cap \partial Q$ et

$$\sup_K u \leq \sup_K u_\epsilon = \sup_{K \cap \partial Q} u_\epsilon = \sup_{K \cap \partial Q} u + \epsilon L^2.$$

En faisant tendre ϵ vers 0 on obtient

$$\sup_K u = \sup_{K \cap \partial Q} u.$$

□

Nous allons en déduire l'unicité de notre problème. En effet, soient u et v deux solutions et soit $w = v - u$. Alors w est continue sur $\overline{Q}$, de classe C^2 sur Q, avec (4.1) vérifiée par w. De plus

$$w(x, t) = 0, \forall (x, t) \in \partial Q.$$

Fixons $T > 0$. Puisque $Pw = 0$ sur Q, d'après le lemme 4.1.23, $w(x, t) \leq 0$. Puisque $P(-w) = 0$ sur Q, on a de même $-w(x, t) \leq 0$, et donc $w(x, t) = 0$. Comme T est arbitraire, $w \equiv 0$ sur Q, ce qui prouve l'unicité de la solution.

4.2 Exercices

Exercice 4.2.1 *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{T}$ telle que $\widehat{f}(n) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer, à l'aide du théorème de Fejér et du lemme de Fatou, que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) < \infty.$$

En déduire que f est égal sa série de Fourier.

Exercice 4.2.2 (Non surjectivité de la transformée de Fourier)

1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ tel que $\widehat{f}(n) = -\widehat{f}(-n) \geq 0$ pour tout $n \geq 0$. Montrer qu'alors, nécessairement,*
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\widehat{f}(n)}{n} < \infty.$$
Indication : considérer la fonction F définie par $F(e^{it}) = \int_0^t f(e^{i\theta})d\theta$ et vérifier que F est continue sur $\mathbb{T}$, avec $\widehat{F}(n) = \frac{\widehat{f}(n)}{in}$.
2. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$ tel que $a_n = -a_{-n} = \frac{1}{\log n}$ pour $n \geq 2$ et $a_0 = a_1 = a_{-1} = 0$. Montrer qu'il existe pas de fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ tel que $\mathcal{F}(f) = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.*

Exercice 4.2.3 (Fonction signal) *Soit $\epsilon \in]0, \pi[$ et soit σ_ϵ la fonction de $L^\infty(\mathbb{T})$ telle que $\sigma_\epsilon(e^{it}) = 1$ si $|t| \leq \epsilon$ et $\sigma_\epsilon(e^{it}) = 0$ si $\epsilon < |t| \leq \pi$. En appliquant le théorème de Dirichlet en $t = \epsilon$, retrouver la formule*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2},$$

pour $0 < a < 2\pi$.

Exercice 4.2.4 (Fonction triangle) *Soit $\epsilon \in]0, \pi[$ et soit Δ_ϵ la fonction de $L^\infty(\mathbb{T})$ telle que $\Delta_\epsilon(e^{it}) = 1 - \frac{|t|}{\epsilon}$ si $|t| \leq \epsilon$ et $\sigma_\epsilon(e^{it}) = 0$ si $\epsilon < |t| \leq \pi$. En appliquant le 3. du théorème 4.1.17 avec $t = 0$ et $\epsilon = \pi$, montrer que*

$$\sum_{n\neq 0} |\widehat{\Delta_\epsilon}(n)| = 1/2.$$

Retrouver les identités classiques

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad et \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 4.2.5 (Fonction triangle décalée) *Soit S l'élément de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ défini sur par les formules :*

$$S(e^{it}) = t \quad si \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \quad et \quad S(e^{it}) = \pi - t \quad si \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Montrer que

$$\sum_{n \neq 0} |\widehat{S}(n)| = \pi/2.$$

Exercice 4.2.6 (Fonction exponentielle apériodique) *Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et soit f la fonction de $L^\infty(\mathbb{T})$ définie par*

$$f(e^{it}) = e^{iat} \quad si \quad -\pi \leq t < \pi.$$

En appliquant le théorème de Dirichlet en $t = \pi$, montrer que

$$\pi\, cotan(\pi a) = \frac{1}{a} + a \sum_{n \geq 1} \frac{1}{a^2 - n^2} \quad (a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$$

En utilisant le développement asymptotique de $cotan u = \frac{1}{u} - \frac{u}{3} - \frac{u^3}{45} - \cdots$ quand $u \to 0$, montrer, en faisant tendre a vers 0, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \cdots$$

Chapitre 5

Tranformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

5.1 Analyse de Fourier pour les fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$

Il est important de remarquer que, contrairement au cas du cercle unité, ou d'un intervalle fini de $\mathbb{R}$, les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$ ne forment pas une chaîne. En d'autres termes, pour tous $p, q \in]0, \infty]$, $p \neq q$, nous avons

$$L^p(\mathbb{R}) \setminus Ł^q(\mathbb{R}) \neq \emptyset.$$

On notera par $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement borné ou uniformément continue. Pour certaines applications il sera suffisant de considérer le sous-espace plus petit

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}),\ \lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0\}.$$

Les éléments de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ sont eux bornés et uniformément continus sur $\mathbb{R}$. L'exemple de la fonction "sinus" montre que la réciproque est fausse. Comme les éléments de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ sont bornés, $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ peut aussi être considéré comme un sous-espace fermé de $L^\infty(\mathbb{R})$. Dans ce cas, on munit $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ de la norme du sup, laquelle sera atteinte. Une autre sous-classe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à support compactes ; elles aussi sont bornées et uniformément continues. Les espaces *lisses* $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_0^n(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_c^n(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ sont définis de façon analogue.

5.1.1 La transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

La *transformée de Fourier* d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, notée $\widehat{f}$, est définie par :

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i2\pi t\tau}d\tau \qquad t \in \mathbb{R}.$$

L'*intégrale de Fourier* de f est définie formellement par :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\tau)e^{i2\pi t\tau}d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Un des objectifs est d'étudier la convergence de cette intégrale.

Lemme 5.1.1 *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$,*

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

De plus $\widehat{f}$ est une fonction uniformément continue qui tend vers 0 à l'infini.

Preuve : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t\tau} f(\tau)d\tau \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-i2\pi t\tau}||f(\tau)|d\tau \\ &= \|f\|_1. \end{aligned}$$

Pour montrer que $\widehat{f}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, soient $t, t' \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(t) - \widehat{f}(t')| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (e^{-i2\pi t\tau} - e^{-i2\pi t'\tau}) f(\tau)d\tau) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-i2\pi t\tau} - e^{-i2\pi t'\tau}||f(\tau)|d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} |1 - e^{-i2\pi(t-t')\tau}||f(\tau)|d\tau. \end{aligned}$$

L'intégrant étant bornée par 2, et f étant intégrable sur $\mathbb{R}$, la continuité découle du théorème de convergence dominé.

Pour la limite en l'infini, on utilise la densité des fonctions C^1 à support compact dans $L^1(\mathbb{R})$. En effet, si f est C^1 à support compact, en faisant une intégration par parties dans l'expression de $\widehat{f}$, on obtient, pour $t \neq 0$,

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f'(x) dx,$$

d'où

$$|\widehat{f}(t)| \leq \frac{1}{|t|} \|f'\|_{L^1}.$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions C^1 à support compact qui converge vers f dans L^1. Etant donné $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\|f_{n_0} - f\|_{L^1} \leq \frac{\epsilon}{2}$. On écrit

$$\widehat{f}(t) = \widehat{f}_{n_0}(t) + \widehat{f}(t) - \widehat{f}_{n_0}(t),$$

et on en déduit :

$$|\widehat{f}(t)| \leq \frac{1}{|t|} \|f'_{n_0}\|_{L^1} + \|f - f_{n_0}\|_{L^1} \leq \frac{1}{|t|} \|f'_{n_0}\|_{L^1} + \frac{\epsilon}{2}.$$

En prenant $|t| \geq \frac{2}{\epsilon} \|f'_{n_0}\|_{L^1}$, on obtient $|\widehat{f}(t)| \leq \epsilon$.

$\square$

Nous allons à présent donner une formule qui, sous certaines hypothèses, relie la somme des valeurs prises par $f \in L^1(\mathbb{R})$ aux points entiers à la somme des valeurs prises par $\widehat{f}$ aux points entiers. De façon précise, on a l'énoncé suivant :

Théorème 5.1.2 (Formule sommatoire de Poisson) *Soit $F \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $M > 0$ et $\alpha > 1$ tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} : |F(x)| \leq M(1 + |x|)^{-\alpha}.$$

Supposons de plus que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{F}(n| < \infty.$$

Alors on a la relation :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{F}(n).$$

Preuve : On introduit la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(x+n).$$

Cette série (à double sens) est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$. En effet, si $A > 0$ vérifie $|x| \leq A$, alors pour $|n| \geq 2A$, on a $|x+n| \geq |n| - |x| \geq |n| - A \geq |n|/2$, et donc $|F(x+n)| \leq M(1+|n|/2)^{-\alpha}$. Comme F est continue par hypothèse, f l'est aussi. De plus $f(x+1) = f(x)$. La fonction f est donc 1-périodique. Calculons le m-ième coefficient de Fourier de f :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(m) &= \int_0^1 f(t)e^{-imt}dt \\
&= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(t+n)e^{-i2\pi mt}dt \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 F(t+n)e^{-i2\pi mt}dt.
\end{aligned}$$

L'interversion entre $\int$ et $\sum$ est justifiée par la convergence normale de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(t+n)$ sur $[0,1]$ et le fait que $|e^{-imt}| = 1$. Comme $e^{-i2\pi n} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(m) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 F(t+n)e^{-i2\pi m(t+n)}dt \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(u)e^{-i2\pi mu}du \\
&= \widehat{F}(m).
\end{aligned}$$

Par hypothèse on a donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(m)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{F}(m)| < \infty.$$

D'après le théorème 4.1.17,

$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m)e^{2i\pi mx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(m)e^{2i\pi mx},$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(x+n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(m)e^{2i\pi mx},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, pour $x = 0$, on obtient la formule sommatoire de Poisson.

□

5.1.2 La formule de multiplication sur $L^1(\mathbb{R})$

La formule de multiplication est une conséquence immédiate du théorème de Fubini. Elle est cependant très profonde avec des implications pour les fonctions harmoniques dans le demi-plan supérieur, comme dans la possibilité d'étendre la définition de la transformée de Fourier à d'autres espaces $L^p(\mathbb{R})$.

Lemme 5.1.3 (Formule de multiplication) *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)dt.$$

Preuve : Par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}g(t)dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i2\pi t\tau}d\tau\right) g(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t\tau} g(t)dt\right) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\widehat{g}(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

□

5.1.3 La convolution sur $\mathbb{R}$

Comme pour les fonctions périodiques localement intégrables, on définit la convolution de deux fonctions $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ par

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(\tau)g(t-\tau)|d\tau\right)dt &= \int_{-\infty}^{\infty}|f(\tau)|\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(t-\tau)|dt\right)d\tau \\ &= \|f\|_1\|g\|_1<\infty.\end{aligned}$$

Par conséquent $\int_{-\infty}^{\infty}|f(\tau)g(t-\tau)|d\tau<\infty$ pour presque tout t. Cette observation implique que l'on peut bien définir

$$f\star g(t):=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

pour presque tout t et de plus $f\star g\in L^1(\mathbb{R})$ avec

$$\|f\star g\|_1\leq\|f\|_1\|g\|_1.$$

La fonction $f\star g$ est appelée la *convolution* de f et g.

Il est immédiat de constater que la convolution est

1. commutative : $f\star g=g\star f$;
2. associative : $(f\star g)\star h=f\star(g\star f)$;
3. distributive : $f\star(g+h)=f\star g+f\star h$;
4. homogène : $f\star(\alpha g)=(\alpha f)\star g=\alpha(f\star g)$,

pour tous $f,g,h\in L^1(\mathbb{R})$ et $\alpha\in\mathbb{C}$.

En fait $L^1(\mathbb{R},+,\star)$ est une algèbre de Banach,

Lemme 5.1.4 *Soient $f,g\in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\widehat{f\star g}=\widehat{f}\widehat{g}.$$

Preuve : D'après le théorème de Fubini, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{f\star g}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}(f\star g)(\tau)e^{-i2\pi t\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(s)g(\tau-s)ds\right)e^{-i2\pi t\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}f(s)\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)e^{-i2\pi t(\tau+s)}d\tau\right)ds \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}f(s)e^{-i2\pi ts}ds\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)e^{-i2\pi t\tau}d\tau\right) \\ &= \widehat{f}(t)\widehat{g}(t).\end{aligned}$$

□

5.1.4 Inégalité de Young

Nous avons déjà remarqué que $L^1(\mathbb{T})$ contient $L^p(\mathbb{T})$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$. Ainsi, peut définir sans problème $f \star g$ pour tout $f \in L^p(\mathbb{T})$, $g \in L^r\mathbb{T})$ avec $p, r \geq 1$. Comme dt n'est pas une mesure finie sur $\mathbb{R}$, les espaces de Lebesgue ne forment pas de chaîne et ainsi il faut justifier le fait que $f \star g$ est bien défini lorsque soit f, soit g n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$. Cependant, le théorème de Young va garantir que si $f \in L^r(\mathbb{R})$ et $g \in L^s(\mathbb{R})$ pour certaines valeurs de r et s, alors $f \star g$ sera bien défini.

Théorème 5.1.5 (Inégalité de Young) *Soit $f \in L^r(\mathbb{R}), g \in L^s(\mathbb{R})$ où $1 \leq r, s \leq \infty$ et $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \geq 1$. Soit p défini par*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} - 1.$$

Alors $f \star g \in L^p(\mathbb{R})$ et

$$\|f \star g\|_p \leq \|f\|_r \|g\|_s.$$

Pour la preuve, on procède comme dans le cas des espaces $L^p(\mathbb{T})$.

Voici deux cas particuliers très utilisés de l'inégalité de Young.

Corollaire 5.1.6 *Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $f \star g \in L^p(\mathbb{R})$ et*

$$\|f \star g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

Corollaire 5.1.7 *Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$ et soit $g \in L^q(\mathbb{T})$, où q est l'exposant conjugué de p. Alors $f \star g$ est bien défini pour tout $e^{it} \in \mathbb{T}$, $f \star g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, et*

$$\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

5.1.5 La transformée de Plancherel

Théorème 5.1.8 (formule d'inversion) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et supposons que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\tau) e^{i2\pi t\tau} d\tau.$$

Corollaire 5.1.9 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et supposons que $\widehat{f} \geq 0$ et que f est continue en 0. Alors $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\tau) e^{i2\pi t\tau} d\tau,$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier on a :

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\tau) d\tau.$$

5.1.6 La transformée de Fourier–Plancherel

Nous allons montrer que la transformation de Fourier envoie $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 5.1.10 (Plancherel) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et de plus $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*

Preuve : Posons $g(x) = \overline{f(-x)}$ et $h = f \star g$. D'après l'inégalité de Young, $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. D'autre part, nous avons

$$\widehat{h} = \widehat{f}\widehat{g} = |\widehat{f}|^2 \geq 0.$$

Par conséquent, $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, et de plus, d'après le corollaire 5.1.9, $h(0) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(t) dt$. Calculons à présent chaque membre de l'égalité suivant leur définition. D'un coté nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2 dt = \|\widehat{f}\|_2^2,$$

et d'un autre coté,

$$h(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(0-t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{f(t)} dt = \|f\|_2^2.$$

En comparant les trois dernières égalités, on en déduit $\|\widehat{f}\|^2 = \|f\|^2$.

□

Le théorème de Plancherel est un résultat remarquable. En effet, comme $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, cela implique que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est aussi dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Ce fait va nous permettre d'étendre la définition de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$. En effet, soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et soit $(f_n)_n \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $n \geq 1$, tel que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

Alors $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$. D'après le théorème de Plancherel, nous avons

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_2 = \|\widehat{f_n - f_m}\|_2 = \|f_n - f_m\|_2,$$

ce qui implique que $(\widehat{f_n})_n$ est aussi une suite de Cauchy. Comme $L^2(\mathbb{R})$ est complet,

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}$$

existe dans $L^2(\mathbb{R})$. Si $(g_n)_n$ est une autre suite de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ satisfaisant les mêmes propriétés, alors $\lim_{n\to\infty} \widehat{g_n}$ existe aussi dans $L^2(\mathbb{R})$. Cependant, toujours d'après le théorème de Plancherel, nous avons

$$\begin{aligned} \|\widehat{f_n} - \widehat{g_n}\|_2 &= \|\widehat{f_n - g_n}\|_2 = \|f_n - g_n\|_2 \\ &\leq \|f_n - f\|_2 + \|g_n - f\|_2 \to 0, \end{aligned}$$

et donc, $\lim_{n\to\infty} \widehat{g_n} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}$. Autrement dit, pour un élément de $L^2(\mathbb{R})$, la limite de $\widehat{f_n}$ ne dépend pas du choix pourvu que la suite soit bien dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.

Nous pouvons ainsi définir la **transformée de Fourier–Plancherel** de $f \in L^2(\mathbb{R})$ par

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n},$$

où f_n est une suite de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ satisfaisant

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

Dans le cas particulier où $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on prend $f_n = f$, et on obtient

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}.$$

En d'autres termes, les deux définitions coïncident sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Par conséquent on utilisera sans ambiguité la notation $\widehat{f}$ pour la transformée de Fourier–Plancherel d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$. De plus, d'après le théorème de Plancherel,

$$\|\widehat{f}\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_n}\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2,$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$. Par conséquent, la transformation de Fourier–Plancherel

$$\begin{array}{rl} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) & \to L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto \widehat{f} \end{array}$$

est un opérateur de $L^2(\mathbb{R})$ qui préserve la norme.

Pour une fonction arbitraire $f \in L^2(\mathbb{R})$, on prend habituellement

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{if} \quad |t| \leq n \\ 0 & \text{if} \quad |t| > n. \end{cases}$$

5.1.7 La formule de multiplication sur $L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq 2$

L'identité $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ iplique que la transformation de Fourier–Plancherel est injective sur $L^2(\mathbb{R})$. Pour montrer qu'elle est aussi surjective, et donc que c'est un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R})$, nous avons besoin de la généralisation suivante de la formule de multiplication.

Lemme 5.1.11 (Formule de multiplication) *Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)g(t)dt.$$

Preuve : Soient deux suites f_n et g_n dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $n \geq 1$, tel que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_2 = 0.$$

D'après la définition de la transformée de Fourier–Plancherel, on a aussi :

$$\lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\widehat{g_n} - \widehat{g}\|_2 = 0.$$

D'après l'inégalité de Hölder,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\widehat{g_n} - f\widehat{g}\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_n}g_n - \widehat{f}g\|_1 = 0.$$

Comme f_n et g_n sont dans $L^1(\mathbb{R})$, d'après la formule de multiplication dans $L^1(\mathbb{R})$ (lemme 5.1.3), on a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)dt &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\widehat{g_n}(t)dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f_n}(t)g_n(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)g(t)dt.\end{aligned}$$

□

Nous pouvons à présent montrer que la transformation de Fourier–Plancherel $\mathcal{F}$ est surjective sur $L^2(\mathbb{R})$. En fait, si g est orthogonal à l'image de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\overline{g}(t)dt = 0$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors, grâce à la formule de multiplication, on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\overline{g}}(t)dt = 0,$$

ce qui donne immédiatement $\widehat{\overline{g}} = 0$. Comme $\mathcal{F}$ est injective, $g = 0$, et donc $\mathcal{F}$ est surjective.

Chapitre 6

Analyse complexe

Dans ce chapitre, nous supposerons que le lecteur connaît les résultats de base de la théorie des fonctions holomorphes d'une variable (logarithme complexe, théorème de Cauchy, de Morera, principe du maximum,...). Nous renvoyons le lecteur au livre de Pabion [6], Amar–Matheron [5] ou Rudin [7] par exemple pour les rappels sur ces résultats.

6.1 Produits infinis

6.1.1 Préliminaires sur les produits infinis

Définition 6.1.1 *Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres complexes, on dit que le produit $\prod a_n$ est convergent si la suite des "produits partiels" $(p_n)_{n\geq 1}$, définie par*

$$p_n = \prod_{j=1}^{n} a_j, \qquad (n \geq 1),$$

est convergente. On note alors

$$\prod_{j=1}^{+\infty} a_j = \lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} a_j \right).$$

De plus, si $a_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \geq 1$, est une suite de fontions définies sur un ensemble X et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on dit que le produit $\prod a_n$ est simplement (respectivement uniformément convergent) sur X si la suite des produits partiels $(p_n)_{n\geq 1}$ est simplement (respectivement uniformément) convergente sur X.

Lemme 6.1.2 *Soient $u_1, u_2, \ldots, u_N$ des nombres complexes. On définit*

$$p_N = \prod_{n=1}^{N}(1+u_n) \quad et \quad p_N^* = \prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|).$$

Alors on a

$$p_N^* \leq \exp\left(|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_N|\right), \tag{6.1}$$

et

$$|p_N - 1| \leq p_N^* - 1. \tag{6.2}$$

Preuve : On a pour tout $x \geq 0$, $\exp(x) \geq 1 + x$. D'où, pour tout $1 \leq n \leq N$,

$$\exp(|u_n|) \geq 1 + |u_n|,$$

et, en multipliant toutes ces inégalités, on obtient immédiatement (6.1). On démontre (6.2) par récurrence. Pour $N = 1$, on a $|p_N - 1| = |(1+u_1) - 1| = |u_1|$ et $p_N^* - 1 = 1 + |u_1| - 1 = |u_1|$, d'où

$$|p_N - 1| = p_N^* - 1.$$

Supposons la relation (6.2) vraie pour $N = k$. Ecrivons alors

$$p_{k+1} - 1 = \prod_{n=1}^{k+1}(1+u_n) - 1 = p_k(1+u_{k+1}) - 1 = (p_k - 1)(1+u_{k+1}) + u_{k+1}.$$

D'où, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned}
|p_{k+1} - 1| &\leq |p_k - 1||1 + u_{k+1}| + |u_{k+1}| \\
&\leq (p_k^* - 1)(1 + |u_{k+1}|) + |u_{k+1}| \\
&= p_k^* - 1 + p_k^*|u_{k+1}| \\
&= (1 + |u_{k+1}|)p_k^* - 1 \\
&= p_{k+1}^* - 1,
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la récurrence et donc du lemme.

□

Théorème 6.1.3 *Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble X et à valeurs complexes. Supposons que la série de fonctions*

$$\sum_n u_n$$

soit normalement convergente sur X. Alors le produit

$$f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1 + u_n(x))$$

converge uniformément sur X. De plus, $f(x_0) = 0$ en un point $x_0 \in X$ si et seulement si $u_n(x_0) = -1$ pour un certain entier n.

Preuve : Par hypothèse, il existe une constante réelle $C > 0$ telle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)| \leq C,$$

pour tout $x \in X$. Désignons par $p_N = \prod_{n=1}^{N}(1 + u_n)$. Alors le lemme 6.1.2 implique que

$$|p_N(x) - 1| \leq \exp(C) - 1,$$

soit

$$|p_N(x)| \leq \exp(C), \tag{6.3}$$

pour tout $x \in X$ et tout $N \geq 1$. Soit maintenant ε, $0 < \varepsilon < 1/2$. Il existe un entier N_0 tel que

$$\sum_{n=N_0}^{+\infty} |u_n(x)| \leq \varepsilon,$$

pour tout $x \in X$. Pour $M > N \geq N_0$, on a

$$p_M(x) - p_N(x) = \prod_{n=1}^{M}(1+u_n(x)) - \prod_{n=1}^{N}(1+u_n(x)) = p_N(x)\left(\prod_{n=N+1}^{M}(1 + u_n(x)) - 1\right).$$

En utilisant le lemme 6.1.2, on a

$$\left|\prod_{n=N+1}^{M}(1 + u_n(x)) - 1\right| \leq \prod_{n=N+1}^{M}(1+|u_n(x)|) - 1 \leq \exp\left(\sum_{n=N+1}^{M}|u_n(x)|\right) - 1 \leq \exp(\varepsilon) - 1.$$

D'où, en utilisant (6.3), on a

$$|p_M(x) - p_N(x)| \leq |p_N(x)|(\exp(\varepsilon) - 1) \leq \exp(C)(\exp(\varepsilon) - 1). \tag{6.4}$$

Comme $\varepsilon < 1/2$, on a $\exp(\varepsilon) - 1 \leq 2\varepsilon$ et donc

$$|p_M(x) - p_N(x)| \leq 2\exp(C)\varepsilon,$$

pour tout $x \in X$ et tous $M > N \geq N_0$. Ceci montre que la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est uniformément de Cauchy. Donc elle converge uniformément sur X, ce qui achève la preuve de la première partie du théorème.

D'autre part, en utilisant ce qui précède, on a

$$|p_M(x)| \geq |p_{N_0}(x)|(1 - 2\varepsilon),$$

pour tout $M > N_0$ et donc

$$|f(x)| \geq |p_{N_0}(x)|(1 - 2\varepsilon), \qquad (x \in X).$$

Ainsi si $f(x_0) = 0$ alors $p_{N_0}(x_0) = 0$, ce qui prouve qu'il existe un entier $1 \leq k \leq N_0$ tel que $u_k(x_0) = -1$. Réciproquement si $u_n(x_0) = -1$ pour un certain entier n, alors $P_N(x_0) = 0$, pour tout $N \geq n$ et donc $f(x_0) = 0$.

$\square$

Théorème 6.1.4 *Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que $0 \leq u_n < 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le produit infini $\prod_n (1 - u_n)$ converge et*

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1 - u_n) > 0.$$

(ii) *La série $\sum_n u_n$ est convergente.*

Preuve : Si $p_N = \prod_{n=1}^{N}(1 - u_n)$, il est clair que la suite $(p_N)_N$ est décroissante et minorée par 0. Ainsi $(p_N)_{N\geq 1}$ converge vers une limite $p \geq 0$. Remarquons maintenant que

$$0 \leq p \leq p_N \leq \exp(-u_1 - u_2 - \cdots - u_N), \tag{6.5}$$

car $1 - x \leq \exp(-x)$, pour tout $x \geq 0$.

Si la série $\sum_n u_n$ n'est pas convergente, comme la suite $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ est croissante, cela signifie que S_N tend vers $+\infty$, quand N tend vers $+\infty$ et donc le membre de droite dans (6.5) tend vers 0. Ainsi $p = 0$.

D'un autre coté, si la série $\sum_n u_n$ est convergente, comme $0 \leq u_n < 1$ pour tout n, le théorème précédent implique que $p > 0$.

$\square$

6.1.2 Produits infinis de fonctions holomorphes

Avant d'énoncer le résultat principal de cette section, nous rappelons le résultat fondamental suivant :

Lemme 6.1.5 (Théorème de convergence de Weierstrass) *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω du plan complexe et qui converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction f. Alors f est holomorphe sur Ω et la suite $(f'_n)_{n\geq 1}$ converge vers f' uniformément sur tout compact de Ω.*

Preuve : Puisque la convergence est uniforme sur tous les compacts de Ω, il est clair que la fonction f est continue sur Ω. Maintenant si Δ est un triangle contenu dans Ω, alors Δ est bien sûr un compact de Ω et par convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur Δ, on a

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \lim_{n\to+\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz.$$

Comme les f_n sont holomorphes sur Ω, on a

$$\int_{\partial\Delta} f_n(z)\, dz = 0,$$

et donc

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0.$$

Le théorème de Morera implique alors que f est holomorphe sur Ω. Montrons maintenant que $(f'_n)_{n\geq 1}$ converge vers f' uniformément sur tout compact de Ω. Soit K un compact de Ω et soit V un voisinage relativement compact de K dans Ω, c'est-à-dire que V est un ouvert tel que son adhérence $\overline{V}$ est compact et $K \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega$. Il existe alors $r > 0$ tel que pour tout $z \in K$, le disque fermé de centre z et de rayon r, soit contenu dans V. Appliquons les inégalités de Cauchy à $f - f_n$. On obtient

$$|f'(z) - f'_n(z)| \leq \frac{1}{r} \sup_{|u-z|=r} |f(u) - f_n(u)| \leq \frac{1}{r} \sup_{u\in\overline{V}} |f(u) - f_n(u)|,$$

pour tout $z \in K$. Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\overline{V}$, on en déduit que $(f'_n)_n$ converge uniformément vers f' uniformément sur K, ce qui achève la preuve du lemme.

□

Sous les hypothèses du théorème précédent, la suite de fonctions $(f'_n)_{n\geq 1}$ est aussi une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On en déduit donc aisément par récurrence le résultat suivant :

Corollaire 6.1.6 *Sous les mêmes hypothèses, pour tout $\ell \geq 1$, la suite $(f_n^{(\ell)})_{n\geq 1}$ converge vers $f^{(\ell)}$ uniformément sur tout compact de Ω.*

Théorème 6.1.7 *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω du plan complexe et supposons que la série de fonctions*

$$\sum_n (1 - f_n)$$

soit normalement convergente sur tout compact de Ω. Alors :

(a) *le produit infini*

$$f = \prod_{n=1}^{+\infty} f_n$$

converge uniformément sur tout compact de Ω*. En particulier,* f *est holomorphe sur* Ω*.*

(b) *On a*

$$\mathcal{Z}(f) = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{Z}(f_n), \tag{6.6}$$

et pour tout $a \in \mathcal{Z}(f)$*,*

$$m(a, f) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(a, f_n), \tag{6.7}$$

où $m(a, g)$ *est la multiplicité de* a *comme zéro de* g*, avec la convention que* $m(a, g) = 0$ *si* $g(a) \neq 0$*.*

(c) *Si les* f_n *ne s'annulent pas sur* Ω*, alors* f *ne s'annule pas et sa dérivée logarithmique* f'/f *est donnée par la formule*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n\geq 1} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}, \qquad (z \in \Omega),$$

où la série converge uniformément sur les compacts de Ω*.*

Preuve : La partie (a) découle directement du théorème 6.1.3 et du lemme 6.1.5. L'égalité (6.6) provient également immédiatement du théorème 6.1.3. Maintenant fixons un point $a \in \mathcal{Z}(f)$ et soit K un voisinage compact de a dans Ω. Comme la série $\sum_n (1 - f_n)$ est normalement convergente sur K, on a en particulier que la suite $(f_n(z))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers 1 sur K. Autrement dit, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_0 \Longrightarrow |f_n(z) - 1| \leq \frac{1}{2}, \qquad (z \in K).$$

D'où $|f_n(z)| \geq 1/2$, pour tout $z \in K$ et tout $n \geq N_0$. Ainsi f_n ne s'annule pas sur K si $n \geq N_0$. Ecrivons alors

$$f = g \prod_{n=1}^{N_0-1} f_n,$$

où $g = \prod_{n \geq N_0} f_n$. D'après le théorème 6.1.3, g ne s'annule pas sur K. Donc

$$m(a, f) = m\left(a, \prod_{n=1}^{N_0-1} f_n\right) = \sum_{n=1}^{N_0-1} m(a, f_n),$$

et comme $f_n(a) \neq 0$, si $n \geq N_0$, on obtient (6.7).

Il reste à prouver (c). Pour cela nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 6.1.8 *Notons* Log *la détermination du logarithme définie et holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. *Pour tout* $h \in \mathbb{C}$, $|h| < 1$, *on a*

$$|\mathrm{Log}(1 + h)| \leq \frac{|h|}{1 - |h|}.$$

Admettons pour le moment ce lemme et finissons la preuve de (c). Fixons pour cela un ouvert U relativement compact dans Ω. On sait qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_0 \Longrightarrow |f_n(z) - 1| \leq \frac{1}{2}, \qquad (z \in \overline{U}).$$

En particulier $\Re(f_n(z)) \geq 1/2$ et $\mathrm{Log}(f_n(z))$ est bien définie sur $\overline{U}$, pour tout $n \geq N_0$. Ainsi, d'après le lemme 6.1.8, on a

$$|\mathrm{Log}(f_n(z))| \leq \frac{|f_n(z) - 1|}{1 - |f_n(z) - 1|} \leq 2|f_n(z) - 1|, \qquad (z \in \overline{U}, n \geq N_0).$$

Ceci implique que la série $\sum_{n \geq N_0} \mathrm{Log}(f_n(z))$ est normalement convergente sur $\overline{U}$. Posons

$$F_n = \prod_{j=1}^{n} f_j, \qquad (n \geq 1).$$

On a alors, pour tout $n \geq N_0$,

$$F_n = F_{N_0} \exp\left(\sum_{j=N_0+1}^{n} \mathrm{Log} f_j\right).$$

La fonction exponentielle étant uniformément continue sur les parties bornées de $\mathbb{C}$, on en déduit que

$$f = F_{N_0} \exp\left(\sum_{j=N_0+1}^{+\infty} \mathrm{Log} f_j\right) = F_{N_0} \exp(g),$$

où $g = \sum_{j=N_0+1}^{+\infty} \mathrm{Log}(f_j(z))$. D'après le lemme 6.1.5 de Weierstrass, la fonction g est holomorphe sur U et

$$g'(z) = \sum_{j=N_0+1}^{+\infty} (\mathrm{Log} f_j)'(z) = \sum_{j=N_0+1}^{+\infty} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)}, \qquad (z \in U),$$

où la série converge uniformément sur les compacts de U. D'où

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{F_{N_0}'(z)}{F_{N_0}(z)} + g'(z) \\ &= \sum_{j=1}^{N_0} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)} + \sum_{j=N_0+1}^{+\infty} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)}, \end{aligned}$$

ce qui finalement donne

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)}, \qquad (z \in U),$$

et la série converge uniformément sur tout compact de U. Comme U est un ouvert relativement compact quelconque de Ω, on en déduit finalement que la série converge uniformément sur tout compact de Ω.

Il reste finalement le lemme 6.1.8 à prouver. Pour cela écrivons

$$\mathrm{Log}(1+h) = \int_0^1 \frac{h}{1+th}\, dt.$$

D'où

$$|\mathrm{Log}(1+h)| \leq \int_0^1 \frac{|h|}{|1+th|}\, dt \leq \frac{|h|}{1-|h|} \int_0^1 dt = \frac{|h|}{1-|h|},$$

ce qui achève la preuve du lemme 6.1.8 et du théorème 6.1.7.

□

Remarque 6.1.9 *Notons que d'après la preuve du théorème 6.1.7, la somme dans* (6.7) *est en fait une somme finie !*

Comme application du théorème 6.1.7, on peut obtenir très facilement un cas particulier du théorème de factorisation de Weierstrass dont on établira la version générale dans la section suivante.

Corollaire 6.1.10 *Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres complexes non nuls telle que la série $\sum_n 1/a_n$ est absolument convergente, alors il existe une fonction entière dont les zéros sont exactement les termes de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$.*

Preuve : Il suffit de poser

$$f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

et le théorème 6.1.7 donne les propriétés requises pour f.

□

6.2 Le théorème de factorisation de Weierstrass

Définition 6.2.1 *Posons $E_0(z) = 1 - z$ et pour tout entier $p \geq 1$,*

$$E_p(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right).$$

Ces fonctions ont été introduites par Weierstrass et sont parfois appelées facteurs élémentaires de Weierstrass. Leur unique zéro est en $z = 1$.

Lemme 6.2.2 *Pour $|z| \leq 1$ et $p \geq 0$, on a*

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}.$$

Preuve : Pour $p = 0$, le résultat est évident. Pour $p \geq 1$, un calcul simple montre que

$$E_p'(z) = -z^p \exp(z + \frac{z^2}{2} + \ldots \frac{z^p}{p}).$$

Ceci implique que $-E_p'$ admet un zéro d'ordre p en $z = 0$ et le développement en série entière de $-E_p'$ est de la forme

$$-E_p'(z) = \sum_{n\geq p} a_n z^n, \qquad (z \in \mathbb{C}), \tag{6.8}$$

avec $a_n \in \mathbb{R}$ et $a_n \geq 0$. Remarquons que le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$ car la fonction E_p' est holomorphe sur $\mathbb{C}$. En écrivant

$$1 - E_p(z) = -\int_{[0,z]} E_p'(u)\, du,$$

on obtient par convergence uniforme de la série (6.8) sur $[0, z]$

$$1 - E_p(z) = \sum_{n\geq p} a_n \int_{[0,z]} u^n \, du = \sum_{n\geq p} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}.$$

Ainsi

$$\left| \frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}} \right| = \left| \sum_{n\geq p} \frac{a_n}{n+1} z^{n-p} \right| \leq \sum_{n\geq p} \frac{a_n}{n+1} |z|^{n-p}.$$

D'où, pour $|z| \leq 1$, on obtient

$$\left| \frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}} \right| \leq \sum_{n\geq p} \frac{a_n}{n+1} = 1 - E_p(1) = 1,$$

ce qui termine la démonstration.

□

Théorème 6.2.3 *Soit* $(z_n)_{n\geq 1}$ *une suite de nombres complexes avec* $z_n \neq 0$ *et telle que* $r_n = |z_n| \to +\infty$, *si* $n \to +\infty$. *Soit* $(p_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'entiers telle que, pour tout nombre positif* r, *on ait*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_n} \right)^{1+p_n} < +\infty. \tag{6.9}$$

Alors le produit infini

$$P(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right) \tag{6.10}$$

définit une fonction entière P *qui possède un zéro en chaque point* z_n *et ne possède aucun autre zéro dans le plan complexe.*

Remarque 6.2.4 *La condition* (6.9) *est toujours satisfaite lorsque* $p_n = n - 1$ *par exemple. En effet, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq n_0 \Longrightarrow r_n > 2r.$$

D'où

$$\frac{r}{r_n} < \frac{1}{2},$$

et la série $\sum_n 2^{-n}$ *converge, ce qui implique que la série dans* (6.9) *converge aussi.*

Preuve : Soit K un compact du plan complexe et $r > 0$ tel que $K \subset \overline{B(0,r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Il existe un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors $r_n \geq r$. Lorsque $z \in K$, on a d'après le lemme 6.2.2

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{1+p_n} \leq \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n},$$

pour tout $n \geq n_0$. L'hypothèse (6.9) implique alors que la série

$$\sum_n \left(1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right)$$

converge normalement sur K et le théorème 6.1.7 fournit la conclusion souhaitée.

□

Remarque 6.2.5 *Si α intervient m fois dans la suite $(z_n)_{n\geq 1}$, alors la fonction P possède un zéro d'ordre m au point α.*

Remarque 6.2.6 *Pour certaines suites $(z_n)_{n\geq 1}$, la condition (6.9) est satisfaite pour une suite constante $(p_n)_{n\geq 1}$. Par exemple, si $\sum_n 1/r_n < +\infty$, nous pouvons choisir $p_n = 0$ et le produit canonique s'écrit*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

Si $\sum_n 1/r_n = +\infty$ mais $\sum_n 1/r_n^2 < +\infty$, alors le produit canonique P devient

$$P(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de factorisation de Weierstrass.

Théorème 6.2.7 (Théorème de factorisation de Weierstrass) *Soit f une fonction entière pour laquelle nous supposerons $f(0) \neq 0$ et soient $z_1, z_2, \ldots$ la suite des zéros de f, chacun compté avec son ordre de multiplicité. Alors il existe une fonction entière g et une suite d'entiers $(p_n)_{n\geq 1}$ positifs ou nuls telles que*

$$f(z) = \exp(g(z)) \prod_{n=1}^{+\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right). \tag{6.11}$$

Preuve : Notons que f étant une fonction entière, soit les zéros de f sont en nombre fini, soit on a $|z_n| \to +\infty$. On peut donc considérer P le produit défini par (6.10) et construit à partir des zéros de la fonction f (si le nombre de zéro de f est fini, le produit est fini !). D'après le théorème 6.2.3, la fonction f/P est une fonction entière ne possèdant aucun zéro dans le plan complexe. Ainsi il existe une fonction entière g telle que $f/P = \exp(g)$, ce qui achève la preuve.

□

Remarque 6.2.8 (a) *Lorsque f possède un zéro d'ordre k en 0, le résultat s'applique à la fonction $f(z)/z^k$.*

(b) *La factorisation* (6.11) *n'est pas unique : une factorisation unique peut-être associée à des fonctions f dont les zéros satisfont la condition requise pour la convergence d'un produit canonique (correspondant à une suite $(p_n)_n$ constante).*

On peut également donner un résultat analogue pour les fonctions holomorphes sur un ouvert Ω du plan complexe.

Théorème 6.2.9 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $(a_j)_{j\geq 1}$ une suite de points distincts de Ω sans point d'accumulation dans Ω et soit $(m_j)_{j\geq 1}$ une suite d'entiers de $\mathbb{N}^*$. Alors il existe une fonction f holomorphe sur Ω dont les seuls zéros sont les a_j avec la multiplicité m_j, $j \geq 1$.*

Preuve : Montrons tout d'abord qu'il suffit de prouver que si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel qu'il existe un réel $R > 0$ tel que

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subset \Omega \quad \text{et} \quad |a_j| \leq R,\ (j \geq 1), \tag{6.12}$$

alors il existe une fonction f holomorphe sur Ω telle que

$$\mathcal{Z}(f) = \{a_j : j \geq 1\},\ m(f, a_j) = m_j,\ (j \geq 1), \quad \text{et} \quad \lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 1.$$

En effet, si une telle fonction f peut-être construite pour tout ouvert Ω satisfaisant (6.12), considérons Ω_1 un ouvert quelconque de $\mathbb{C}$, $(\alpha_j)_{j\geq 1}$ une suite de points distincts de Ω_1, sans point d'accumulation dans Ω_1 et $(m_j)_{j\geq 1}$ une suite d'entiers strictement positifs. Choisissons un point $a \in \Omega_1$ et $r > 0$ tel que

$$\overline{D(a,r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\} \subset \Omega_1,$$

et $\alpha_j \notin D(a,r)$, $j \geq 1$. Posons alors

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{1}{z-a}, & \text{si } z \neq a \\ \infty, & \text{si } z = a, \end{cases}$$

et $\Omega = \varphi(\Omega_1) \setminus \{\infty\}$. Il est facile de vérifier que Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ qui vérifie (6.12) avec $R = r$ et $a_j = \varphi(\alpha_j) = (\alpha_j - a)^{-1}$. Donc il existe une fonction f holomorphe sur Ω telle que

$$\mathcal{Z}(f) = \{a_j : j \geq 1\},\ m(f, a_j) = m_j,\ (j \geq 1), \quad \text{et} \lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 1.$$

Posons alors $g = f \circ \varphi$. La fonction g est analytique sur $\Omega_1 \setminus \{a\}$ et

$$\lim_{\substack{z\to a\\ z\in\Omega_1}} g(z) = \lim_{\substack{z\to a\\ z\in\Omega_1}} f(\varphi(z)) = \lim_{|u|\to+\infty} f(u) = 1.$$

Par conséquent la singularité en $z = a$ est éliminable et g est analytique sur Ω_1. De plus,

$$\mathcal{Z}(g) = \{\alpha_j : j \geq 1\} \quad \text{et} \quad m(g, \alpha_j) = m(f, a_j) = m_j,\ (j \geq 1).$$

Il reste donc à prouver que si Ω satisfait (6.12) alors on peut construire une fonction f holomorphe sur Ω telle que

$$\mathcal{Z}(f) = \{a_j : j \geq 1\},\ m(f, a_j) = m_j,\ (j \geq 1), \quad \text{et} \lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 1.$$

Définissons une seconde suite $(z_n)_{n\geq 1}$ constituée des points de la suite $(a_j)_{j\geq 1}$ mais telle que chaque a_j est répété suivant sa multiplicité m_j. Notons tout d'abord que l'hypothèse (6.12) implique que $\Omega \neq \mathbb{C}$ car sinon la suite $(a_j)_{j\geq 1}$ ayant un point d'accumulation dans $\overline{D(0,R)}$, elle aurait un point d'accumulation dans Ω, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \Omega$ est un fermé non vide contenu dans $\overline{D(0,R)}$ qui est un compact. Ainsi $\mathbb{C} \setminus \Omega$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$. Par conséquent, pour tout n, il existe un point $w_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tel que $|z_n - w_n| = \mathrm{dist}(z_n, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Remarquons que

$$\lim_{n \to +\infty} |z_n - w_n| = 0.$$

En effet, sinon comme la suite $(a_j)_{j \geq 1}$ a un point d'accumulation a dans $\overline{D(a,R)}$, on aurait $\mathrm{dist}(a, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$, c'est-à-dire que $a \in \Omega$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Considérons maintenant les fonctions

$$z \longmapsto E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)$$

qui sont holomorphes sur Ω et qui ont un zéro simple en $z = z_n$. Nous allons montrer que le produit infini

$$f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)$$

converge uniformément sur tout compact de Ω. Soit K un compact de Ω. On a $\delta_0 := \mathrm{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$ et pour tout point $z \in K$,

$$\left|\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right| \leq |z_n - w_n| \delta_0^{-1}.$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} |z_n - w_n| = 0$, pour tout $0 < \delta < 1$, il existe un entier N tel que

$$n \geq N,\ z \in K \Longrightarrow \left|\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right| < \delta.$$

Le lemme 6.2.2 implique alors que

$$\left|E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) - 1\right| \leq \left|\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right|^{n+1} < \delta^{n+1}. \tag{6.13}$$

Comme $0 < \delta < 1$, ceci prouve que la série

$$\sum_n \left(E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) - 1\right)$$

converge normalement sur K et le théorème 6.1.7 montre que le produit

$$f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)$$

converge vers une fonction f holomorphe sur Ω. De plus, $\mathcal{Z}(f) = \{a_j : j \geq 1\}$ et $m(f, a_j) = m_j$, $j \geq 1$. Il reste à montrer que $\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 1$. Pour cela, nous allons utiliser le lemme suivant que nous admettrons dans un premier temps.

Lemme 6.2.10 *Pour $|z| < 1/2$, on a*

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\mathrm{Log}(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z|.$$

Soient $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1/2$ et choisissons $R_1 > R$ tel que

$$\frac{2R}{R_1 - R} < \delta.$$

Si $|z| > R_1$, alors comme $|z_n| \leq R$ et $w_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega \subset D(0, R)$, on a

$$\left|\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right| \leq \frac{2R}{R_1 - R} < \delta, \qquad (n \geq 1).$$

Ainsi l'inégalité (6.13) est valable pour tout $n \geq 1$ et tout z tel que $|z| > R_1$. En particulier, on a

$$\Re\left(E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)\right) > 0.$$

On peut donc écrire

$$|f(z) - 1| = \left|\exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Log}\left(E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)\right)\right) - 1\right|. \tag{6.14}$$

Remarquons maintenant avec le lemme 6.2.10 et l'inégalité (6.13) que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Log}\left(E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)\right)\right| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\mathrm{Log}\left(E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)\right)\right| \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\mathrm{Log}\left(1 + E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) - 1\right)\right| \\
&\leq \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left|E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) - 1\right| \\
&\leq \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \delta^{n+1} = \frac{3}{2}\frac{\delta^2}{1 - \delta}.
\end{aligned}$$

Choisissons alors δ suffisamment petit pour que

$$|u| < \frac{3}{2}\frac{\delta^2}{1-\delta} \Longrightarrow |\exp(u) - 1| < \varepsilon.$$

En utilisant (6.14), on obtient ainsi $|f(z) - 1| < \varepsilon$, pour tout $|z| \geq R_1$, ce qui conclut la construction de f.

Il reste donc le lemme 6.2.10 à prouver. Pour $|z| < 1$, on écrit

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left|1 - \frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z}\right| &= \left|1 - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{n-1}}{n}\right| \\
&= \left|1 - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n+1}\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n+1}\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n+1} \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|z|^n \\
&= \frac{1}{2}\frac{|z|}{1-|z|}.
\end{aligned}$$

D'où, si $|z| < 1/2$, on obtient

$$\left|1 - \frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z}\right| \leq \frac{1}{2},$$

ce qui donne le lemme et achève la preuve du théorème.

□

Nous allons terminer cette section par une application intéressante du théorème 6.2.9 aux fonctions méromorphes. Rappelons que si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit qu'une fonction continue $f : \Omega \longrightarrow S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est *méromorphe* si

(a) $f^{-1}(\{\infty\})$ est un sous-ensemble discrêt de Ω.

(b) f est holomorphe sur $\Omega \setminus f^{-1}(\{\infty\})$.

Autrement dit, une fonction méromorphe sur Ω est une fonction analytique sur Ω sauf au plus sur un ensemble discrêt constitué uniquement de pôles.

Remarquons maintenant que si g et h sont deux fonctions holomorphes sur un ouvert Ω du plan complexe et supposons que h n'est pas identiquement nulle dans une composante connexe de Ω. Alors le quotient g/h est clairement une fonction méromorphe sur Ω. En utilisant le théorème 6.2.9, on peut donner une réciproque à cette assertion.

Corollaire 6.2.11 *Toute fonction méromorphe sur un ouvert Ω du plan complexe est le quotient de deux fonctions holomorphes sur Ω.*

Preuve : Soit f une fonction méromorphe sur Ω et soit A l'ensemble des pôles de f. Pour chaque $\alpha \in A$, notons $m(\alpha)$ l'ordre de multiplicité du pôle. Grâce au théorème 6.2.9, il existe une fonction h holomorphe sur Ω telle que h possède un zéro de multiplicité $m(\alpha)$ en chaque point $\alpha \in A$ et telle que h ne possède aucun autre zéro. Posons alors $g = fh$. La fonction g est clairement holomorphe sur $\Omega \setminus A$ et les singularités de g aux points de A sont éliminables et on peut donc étendre g en une fonction holomorphe sur Ω, ce qui achève la preuve du corollaire.

$\square$

6.3 La formule de Jensen

D'après le théorème 6.2.9, l'ensemble des zéros d'une fonction analytique sur un domaine Ω du plan complexe n'est soumis à aucune autre condition que la condition évidente qui impose l'absence de points d'accumulation dans Ω. Si on remplace la classe des fonctions holomorphes sur Ω par certains sous-ensembles définis par des conditions de croissance au bord, la situation est bien différente.

Dans ce cas, la distribution des zéros doit satisfaire certaines conditions quantitatives. Beaucoup de ces résultats reposent sur la formule de Jensen que nous allons donner dans cette section.

Nous commençons par un lemme qui va être utile dans la preuve de la formule de Jensen.

Lemme 6.3.1 *On a*
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|\,d\theta = 0.$$

Preuve : Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 1\}$. Notons Log la détermination du logarithme définie sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0[$ par

$$\mathrm{Log}(u) = \log|u| + i\arg_{]-\pi,\pi[}(u), \qquad (u \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,0[),$$

et $h(z) = \mathrm{Log}(1-z)$, $z \in \Omega$. Comme $\Re(1-z) > 0$, pour tout $z \in \Omega$, la fonction h est holomorphe sur Ω et on a

$$h(0) = \mathrm{Log}(1) = 0.$$

Pour $\delta > 0$ assez petit, on définit le chemin Γ par

$$\Gamma(t) = e^{it}, \qquad \delta < t < 2\pi - \delta,$$

et γ l'arc de cercle dont le centre est 1 et qui va de $e^{-i\delta}$ à $e^{i\delta}$ tout en restant dans Ω. D'après la formule de Cauchy, on a

$$h(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{h(z)}{z}\,dz + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{h(z)}{z}\,dz,$$

et comme $h(0) = 0$, on obtient que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{h(z)}{z}\,dz = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{h(z)}{z}\,dz. \tag{6.15}$$

Or

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{h(z)}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} h(e^{it})\,dt,$$

d'où

$$\Re\left(\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{h(z)}{z}\,dz\right) = \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} \log|1-e^{it}|\,dt.$$

Finalement, en utilisant (6.15), on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} \log|1-e^{it}|\,dt = -\Re\left(\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{h(z)}{z}\,dz\right),$$

et donc

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} \log|1-e^{it}|\,dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|h(z)|}{|z|}\,|dz| \le \frac{1}{2\pi}\ell(\gamma) \sup_{z\in\mathrm{supp}(\gamma)} \frac{|h(z)|}{|z|}. \tag{6.16}$$

Or $\ell(\gamma) \le \pi\delta$ car on tourne au plus de π et le rayon du cercle est $|1-e^{i\delta}| = |2\sin(\delta/2)| \le \delta$. De plus, pour $z \in \mathrm{supp}(\gamma)$, on a $|1-z| = 2\sin(\delta/2) \le \delta$ et donc

$$|z| \ge 1-\delta. \tag{6.17}$$

Enfin

$$|h(z)|^2 = (\log|1-z|)^2 + \left(\arg_{]-\pi,\pi[}(1-z)\right)^2 \le (\log(2\sin(\delta/2)))^2 + \pi^2. \tag{6.18}$$

D'où, en utilisant (6.16), (6.17) et (6.18), on obtient

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} \log|1-e^{it}|\,dt\right| \le \frac{\delta}{2}\frac{\sqrt{(\log(2\sin(\delta/2)))^2+\pi^2}}{1-\delta}.$$

On obtient alors le résultat en faisant tendre δ vers 0.

Théorème 6.3.2 (Formule de Jensen) *Soit $\Omega = D(0,R)$ et f une fonction holomorphe sur Ω telle que $f(0) \neq 0$. On considère $0 < r < R$ et on note $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ les zéros de f appartenant à $\overline{D(0,r)}$, comptés avec leur ordre de multiplicité. On a*

$$|f(0)|\prod_{n=1}^N \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta\right).$$

Preuve : Numérotons les points α_j de sorte que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ appartiennent à $D(0,r)$ et que $|\alpha_{m+1}| = |\alpha_{m+2}| = \cdots = |\alpha_N| = r$. (Bien entendu, on peut avoir $m = 0$ ou $m = N$). Définissons

$$g(z) = f(z)\prod_{n=1}^m \frac{r^2-\overline{\alpha_n}z}{r(\alpha_n - z)} \prod_{n=m+1}^N \frac{\alpha_n}{\alpha_n - z}. \tag{6.19}$$

La fonction g est holomorphe sur $D = D(0, r+\varepsilon)$ pour un certain $\varepsilon > 0$ et elle ne s'annule pas dans D. Comme D est simplement connexe, il existe une fonction h holomorphe sur D telle que $g = e^h$. En particulier, avec la formule de Cauchy, on a

$$h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(re^{i\theta})\, d\theta,$$

et donc

$$\Re(h(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re(h(re^{i\theta}))\, d\theta. \tag{6.20}$$

Or $|g(z)| = e^{\Re(h(z))}$, pour tout $z \in D$, d'où $\log|g(z)| = \Re(h(z))$, ce qui donne avec (6.20)

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|g(re^{i\theta})|\, d\theta. \tag{6.21}$$

En utilisant (6.19), on a

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{r}{\alpha_n} = |f(0)| \prod_{n=1}^{N} \frac{r}{\alpha_n}, \tag{6.22}$$

la deuxième égalité provenant du fait que $|\alpha_{m+1}| = \cdots = |\alpha_N| = r$. De plus, on vérifie facilement que pour $|z| = r$, on a

$$\left| \frac{r^2 - \overline{\alpha_n} z}{r(\alpha_n - z)} \right| = 1,$$

d'où si $\alpha_n = re^{i\theta_n}$ pour $m < n \leq N$, on obtient

$$\log|g(re^{i\theta})| = \log|f(re^{i\theta})| - \sum_{n=m+1}^{N} \log|1 - e^{i(\theta-\theta_n)}|.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|g(re^{i\theta})|\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta - \sum_{n=m+1}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|1 - e^{i(\theta-\theta_n)}|\, d\theta.$$

Or d'après le lemme 6.3.1, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|1 - e^{i(\theta-\theta_n)}|\, d\theta = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|g(re^{i\theta})|\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta. \tag{6.23}$$

Finalement en utilisant (6.21), (6.22) et (6.23), on en déduit

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \log|f(0)| + \sum_{n=1}^{N}\log\left(\frac{r}{|\alpha_n|}\right),$$

ce qui donne le résultat.

□

Remarque 6.3.3 *Si f a un zéro d'ordre k en 0, on peut appliquer la formule de Jensen à $f(z)/z^k$.*

Si f est une fonction entière, la formule de Jensen permet de contrôler le nombre de zéros de f à l'intérieur d'un disque $\overline{D(0,r)}$ en fonction du maximum de f sur $\overline{D(0,2r)}$.

Corollaire 6.3.4 *Soit f une fonction entière. On définit*

$$M(r) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}}|f(re^{i\theta})|, \qquad 0 < r < +\infty,$$

et $n(r)$ désigne le nombre de zéros de f comptés avec multiplicité et appartenant à $\overline{D(0,r)}$. Supposons de plus que $f(0)\neq 0$. Alors

$$n(r)\log 2 + \log|f(0)| \le \log M(2r).$$

Preuve : En utilisant le théorème 6.3.2, on a

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{n(2r)}\frac{2r}{|\alpha_n|} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(2re^{i\theta})|\,d\theta\right) \le M(2r),$$

où $(\alpha_n)_{n\ge1}$ désigne la suite des zéros de f préalablement numérotée de sorte que

$$|\alpha_1| \le |\alpha_2| \le \dots.$$

Donc

$$M(2r) \geq |f(0)| \prod_{n=1}^{n(r)} \frac{2r}{|\alpha_n|} \geq |f(0)| 2^{n(r)},$$

ce qui implique

$$n(r) \log 2 + \log |f(0)| \leq \log M(2r).$$

□

6.4 Un théorème de Borel–Carathéodory

Dans cette section, nous allons donner un résultat du à Borel–Carathéodory qui nous servira dans la section suivante. Ce résultat est par ailleurs intéressant.

Théorème 6.4.1 (Théorème de Borel–Carathéodory) *Soit f une fonction analytique sur un ouvert Ω contenant le disque fermé $\overline{D(0,R)}$ et on note*

$$A(r) = \sup_{|z| \leq r} \Re(f(z)), \quad et \quad M(r) = \sup_{|z| \leq r} |f(z))|, \quad (0 < r \leq R).$$

Alors

(i) *Pour tout $0 < r < R$, on a*

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|. \tag{6.24}$$

(ii) *Si $A(R) \geq 0$, alors pour tout $n \geq 0$ et tout $0 < r < R$, on a*

$$\max_{|z| \leq r} |f^{(n)}(z)| \leq \frac{2^{n+2} n! R}{(R-r)^{n+1}} \left(A(R) + |f(0)| \right).$$

Preuve : (i) : Le résultat est trivial si f est constante. En effet, dans ce cas, on a $M(r) = |f(0)|$ et $A(r) = \Re(f(0))$, d'où (6.24) est équivalent à

$$|f(0)| \leq \frac{2r}{R-r} \Re(f(0)) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|,$$

c'est-à-dire

$$0 \leq \frac{2r}{R-r} \Re(f(0)) + \frac{2r}{R-r} |f(0)|,$$

et cette inégalité est clairement satisfaite.

On peut donc maintenant supposer que f n'est pas constante. Nous allons tout d'abord prouver le résultat dans le cas où $f(0) = 0$. Soit $M > A(R)$. Comme $f(0) = 0$, on a

$$A(R) \geq \Re(f(0)) = 0,$$

et donc $M > 0$. Considérons alors

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{2M - f(z)}, \qquad |z| < R.$$

Remarquons que $\Re(2M - f(z)) = 2M - \Re(f(z)) \geq 2M - A(R) > M > 0$. On en déduit que φ est analytique sur $D(0, R)$. On a également $\varphi(0) = 0$ et de plus, si on note $f(z) = u + iv$, avec $u, v \in \mathbb{R}$, on a

$$|\varphi(z)|^2 = \frac{|u + iv|^2}{|2M - u - iv|^2} = \frac{u^2 + v^2}{(2M - u)^2 + v^2}.$$

Or $-2M + u \leq u \leq 2M - u$ car $u = \Re(f(z)) \leq A(R) < M$. D'où $|u| \leq |2M - u|$ et donc $u^2 \leq (2M - u)^2$. On obtient finalement que

$$|\varphi(z)| \leq 1, \qquad |z| < R.$$

Le lemme de Schwarz implique alors que

$$\sup_{|z| \leq r} |\varphi(z)| \leq \frac{r}{R}.$$

Or $|f(z)| = |2M\varphi(z)|/|1 + \varphi(z)|$ et donc

$$\sup_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \frac{2M\frac{r}{R}}{1 - \frac{r}{R}} = \frac{2Mr}{R - r}.$$

Comme M est choisit arbitrairement plus grand que $A(R)$, on en déduit que

$$\sup_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \frac{2r}{R - r} A(R),$$

ce qui prouve (6.24) pour toute fonction f telle que $f(0) = 0$.

Supposons maintenant que $f(0) \neq 0$. On applique alors le résultat à $f(z) - f(0)$, ce qui donne

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{2r}{R-r} \sup_{|z|\leq R} \Re(f(z) - f(0)) \leq \frac{2r}{R-r} \left(A(R) + |f(0)|\right),$$

pour tout $|z| \leq r$. D'où

$$|f(z)| \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \left(1 + \frac{2r}{R-r}\right) |f(0)| = \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|,$$

ce qui prouve l'inégalité (6.24) et achève la preuve du point (i).

(ii) : Si $A(R) \geq 0$, alors on a

$$\frac{2r}{R-r} A(R) \leq \frac{R+r}{R-r} A(R),$$

et donc d'après l'inégalité (6.24), on obtient que

$$\sup_{|z|\leq r} |f(z)| \leq \frac{R+r}{R-r} \left(A(R) + |f(0)|\right), \tag{6.25}$$

pour tout $0 < r < R$. Fixons $z \in \overline{D(0,r)}$ et considérons γ le cercle de centre z et de rayon $\delta = (R-r)/2$. Remarquons que $\overline{D(z,\delta)} \subset \overline{D(0,(R+r)/2)} \subset D(0,R)$. En effet, si $|u - z| \leq \delta$, on a

$$|u| \leq \delta + |z| \leq \frac{R-r}{2} + r = \frac{R+r}{2} < R.$$

On peut donc appliquer la formule de Cauchy qui donne

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}} \, du. \tag{6.26}$$

Or l'inégalité (6.25) implique que

$$\begin{aligned} \sup_{|u-z|\leq\delta} |f(u)| &\leq \sup_{|w|\leq(R+r)/2} |f(w)| \leq \frac{R + \frac{R+r}{2}}{R - \frac{R+r}{2}} (A(R) + |f(0)|) \\ &\leq \frac{4R}{R-r} (A(R) + |f(0)|). \end{aligned}$$

D'où, en utilisant (6.26), on obtient que

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi\delta^n} 2\pi \frac{4R}{R-r} (A(R) + |f(0)|) = \frac{2^{n+2} n! R}{(R-r)^{n+1}} (A(R) + |f(0)|),$$

ce qui prouve (ii).

□

6.5 Fonctions entières d'ordre fini et théorème d'Hadamard

Définition 6.5.1 *Soit f une fonction entière et notons*

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \qquad 0 < r < +\infty.$$

On dit que f est une fonction entière d'ordre fini s'il existe $a > 0$ tel que

$$M(r) \leq e^{r^a}, \qquad \text{pour } r > r_0(a) > 0. \tag{6.27}$$

Dans ce cas, $\alpha = \inf a$ est appelé l'ordre de f. Si (6.27) n'est satisfaite pour aucun réel $a > 0$, alors on dit que l'ordre de f est $+\infty$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la définition.

Lemme 6.5.2 *Soit f une fonction entière d'ordre fini α. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que*

$$|f(z)| \leq e^{|z|^{\alpha+\varepsilon}}, \qquad |z| > R.$$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure, il existe a' satisfaisant (6.27) tel que $\alpha \leq a' < \alpha + \varepsilon$. D'où, pour $|z| > R = \max(1, r_0(a'))$, on a

$$|f(z)| \leq e^{|z|^{a'}} \leq e^{|z|^{\alpha+\varepsilon}}.$$

□

Théorème 6.5.3 (Théorème de factorisation d'Hadamard) *Soit f une fonction entière d'ordre fini égal à α et telle que $f(0) \neq 0$. Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ la suite des zéros de f comptés avec multiplicité et telle que*

$$0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots \leq |\alpha_n| \leq \ldots$$

Notons $p = [\alpha]$-la partie entière de α. Alors

(i) *la série*

$$\sum_n \frac{1}{|\alpha_n|^{p+1}}$$

converge.

(ii) *Il existe un polynôme Q de degré inférieur ou égal à p tel que*

$$f(z) = \exp(Q(z)) \prod_{n=1}^{+\infty} E_p\left(\frac{z}{\alpha_n}\right).$$

Preuve : (i) : Sans perte de généralité, on peut bien sûr supposer que $f(0) = 1$. Le corollaire 6.3.4 implique alors que

$$n(r)\log 2 \leq \log M(2r).$$

Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha + \varepsilon < p + 1$. Comme f est d'ordre fini α, il existe $R > 0$ tel que

$$\log M(2r) \leq (2r)^{\alpha+\varepsilon/2},$$

pour tout $r > R$. Donc

$$n(r)\log 2 \leq (2r)^{\alpha+\varepsilon/2},$$

pour $r > R$. En particulier, pour tout r suffisamment grand, on a

$$n(r) \leq r^{\alpha+\varepsilon}.$$

Puisque $|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots \leq |\alpha_k|$, il existe un entier k_0 tel que

$$k \leq n(|\alpha_k|) \leq |\alpha_k|^{\alpha+\varepsilon},$$

pour tout $k \geq k_0$, et donc

$$|\alpha_k|^{-(p+1)} \leq k^{-\frac{p+1}{\alpha+\varepsilon}},$$

pour tout $k \geq k_0$. Comme $\alpha + \varepsilon < p + 1$, la série

$$\sum_k k^{-\frac{p+1}{\alpha+\varepsilon}}$$

est convergente et donc

$$\sum_k |\alpha_k|^{-(p+1)} < +\infty.$$

(ii) : D'après le théorème 6.2.7, il existe une fonction entière Q telle que

$$f(z) = \exp(Q(z)) \prod_{n=1}^{+\infty} E_p\left(\frac{z}{\alpha_n}\right).$$

Il reste à montrer que Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à p. Pour $z \neq \alpha_k$, on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = Q'(z) + \frac{F'(z)}{F(z)},$$

où $F(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} E_p\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)$. D'où

$$\frac{d^p}{dz^p}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = Q^{(p+1)}(z) + \frac{d^p}{dz^p}\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right). \tag{6.28}$$

Or d'après le théorème 6.1.7, on a

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}, \qquad z \neq \alpha_n,$$

où $f_n(z) = E_p\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)$ et la série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_n : n \geq 1\}$. Un calcul simple montre que

$$\frac{E_p'(u)}{E_p(u)} = -\frac{u^p}{1-u}, \qquad (u \neq 1).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{f_n'(z)}{f_n(z)} &= -\frac{1}{\alpha_n}\frac{E_p'\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)}{E_p\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)} \\
&= -\frac{1}{\alpha_n}\frac{z^p}{\alpha_n^p(1-\frac{z}{\alpha_n})} \\
&= \frac{z^p}{\alpha_n^p(z-\alpha_n)}.
\end{aligned}$$

Donc il existe un polynôme q de degré inférieur ou égal à $p-1$ tel que

$$\frac{f_n'(z)}{f_n(z)} = q(z) + \frac{1}{z-\alpha_n}.$$

Comme q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $p-1$, on a

$$\frac{d^p}{dz^p}q(z) = 0,$$

et on obtient par un calcul simple que

$$\frac{d^p}{dz^p}\left(\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\right) = \frac{d^p}{dz^p}\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right) = \frac{(-1)^p p!}{(z-\alpha_n)^{p+1}}.$$

On a alors en appliquant le corollaire 6.1.6

$$\frac{d^p}{dz^p}\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d^p}{dz^p}\left(\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\right) = (-1)^p p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-\alpha_n)^{p+1}},$$

et la série converge uniformément sur tout compact $K \subset \mathbb{C} \setminus \{\alpha_n : n \geq 1\}$. Finalement, en utilisant (6.28), on obtient

$$Q^{(p+1)}(z) = \frac{d^p}{dz^p}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) + (-1)^{p+1}p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-\alpha_n)^{p+1}}. \tag{6.29}$$

Soit $R > 0$ et posons

$$g_R(z) = f(z)\prod_{|z_n|\leq R}\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)^{-1}.$$

Notons que le produit est fini car f ne possède qu'un nombre fini de zéros à l'intérieur du compact $\overline{D(0,R)}$. La fonction g_R est une fonction entière et il existe $\varepsilon > 0$ tel que g_R ne s'annule pas sur $D(0, R+\varepsilon)$. De plus, $g_R(0) = 1$. Ainsi, on peut trouver une détermination holomorphe du logarithme telle que si $h_R(z) = \mathrm{Log}(g_R(z))$, alors h_R est holomorphe sur $D(0, R+\varepsilon)$ et $h_R(0) = 0$. Montrons qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\Re(h_R(z)) \leq KR^{\alpha+\varepsilon}, \tag{6.30}$$

pour tout $|z| \leq R$. Remarquons que si $|z| = 2R$ et $|\alpha_n| \leq R$, on a

$$\left|1-\frac{z}{\alpha_n}\right| \geq \frac{|z|}{|\alpha_n|} - 1 = \frac{2R}{|\alpha_n|} - 1 \geq 1.$$

D'où $|g_R(z)| \leq |f(z)|$. Or f étant une fonction entière d'ordre fini égal à α, pour tout R suffisamment grand, on a

$$|f(z)| \leq e^{|z|^{\alpha+\varepsilon}} = e^{(2R)^{\alpha+\varepsilon}},$$

pour tout $|z| = 2R$. Il s'ensuit que

$$|g_R(z)| \leq e^{(2R)^{\alpha+\varepsilon}}, \qquad (|z| = 2R). \tag{6.31}$$

Comme g_R est une fonction entière, le principe du maximum implique que l'inégalité (6.31) est valable pour tout $|z| \leq 2R$ et en particulier pour tout $|z| \leq R$. D'où

$$\Re(h_R(z)) = \log|g_R(z)| \leq (2R)^{\alpha+\varepsilon} \leq KR^{\alpha+\varepsilon},$$

pour tout $|z| \leq R$ et pour R suffisamment grand. Le théorème 6.4.1 implique alors que

$$|h_R^{(p+1)}(z)| \leq \frac{2^{p+2}(p+1)!R}{(R-r)^{p+2}} KR^{\alpha+\varepsilon},$$

pour tout $|z| = r < R$. Donc pour $|z| = R/2$, on obtient

$$|h_R^{(p+1)}(z)| \leq CR^{\alpha+\varepsilon-(p+1)}. \tag{6.32}$$

D'autre part,

$$h_R'(z) = \frac{g_R'(z)}{g_R(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{|\alpha_n| \leq R} \frac{1}{z - \alpha_n},$$

et donc

$$h_R^{(p+1)}(z) = \frac{d^p}{dz^p}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) + (-1)^{p+1}p! \sum_{|\alpha_n| \leq R} \frac{1}{(z-\alpha_n)^{p+1}}.$$

Ainsi avec (6.29), on en déduit que

$$Q^{(p+1)}(z) = h_R^{(p+1)}(z) + (-1)^{p+1}p! \sum_{|\alpha_n| > R} \frac{1}{(z-\alpha_n)^{p+1}}. \tag{6.33}$$

Remarquons maintenant que pour $|z| = R/2$, on a

$$\left| \sum_{|\alpha_n| > R} \frac{1}{(z-\alpha_n)^{p+1}} \right| \leq \sum_{|\alpha_n| > R} \frac{2^{p+1}}{|\alpha_n|^{p+1}}.$$

En combinant (6.32) et (6.33), on obtient finalement que

$$|Q^{(p+1)}(z)| \leq \widetilde{C}\left(R^{\alpha+\varepsilon-(p+1)} + \sum_{|\alpha_n|>R} \frac{1}{|\alpha_n|^{p+1}}\right),$$

pour tout $|z| = R/2$. Choisissons alors $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\alpha+\varepsilon-(p+1) < 0$. On a alors

$$\lim_{R\to+\infty} R^{\alpha+\varepsilon-(p+1)} = 0,$$

et comme la série $\sum_n 1/|\alpha_n|^{p+1}$ converge, on a aussi

$$\lim_{R\to+\infty} \sum_{|\alpha_n|>R} \frac{1}{|\alpha_n|^{p+1}} = 0.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe R_0 tel que

$$|Q^{(p+1)}(z)| \leq \varepsilon',$$

pour tout $|z| = R/2$ et $R \geq R_0$. Comme Q est une fonction entière, ceci est valable (par le principe du maximum) pour tout $|z| \leq R/2$. Ceci implique que $Q^{(p+1)}(z) = 0$ pour tout z, et donc Q est un polynôme de degré au plus p.

□

Remarque 6.5.4 *La condition $f(0) \neq 0$ n'est pas contraignante : si f a un zéro d'ordre m à l'origine , on peut appliquer le théorème 6.5.3 à $g(z) = f(z)/z^m$. En effet, il suffit de montrer que la fonction g est une fonction entière d'ordre fini. Pour cela, on note $M(r) = \max\{|f(z) : |z| = r|\}$. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant le lemme 6.5.2, il existe $R > 0$ tel que*

$$\log|g(z)| \leq \log(M(r)r^{-m}) = \log(M(r)) - m\log(r) \leq r^{\alpha+\varepsilon} - m\log r \leq r^{\alpha+\varepsilon},$$

pour tout $|z| > R$. Ceci prouve que g est une fonction entière d'ordre fini $\beta \leq \alpha$. On peut en fait prouver que $\beta = \alpha$. En effet, notons $M'(r) = \max\{|g(z) : |z| = r|\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R' > 0$ tel que si $|z| > R'$, alors

$$\log|f(z)| = \log|z^m g(z)| = m\log|z| + \log|g(z)| \leq m\log|z| + |z|^{\beta+\varepsilon} < |z|^{\beta+2\varepsilon}.$$

Ceci prouve que $\alpha \leq \beta + 2\varepsilon$ et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $\alpha \leq \beta$, c'est-à-dire finalement que $\beta = \alpha$.

6.6 Le principe de Phragmen–Lindelöf

Pour un domaine borné Ω, le principe du maximum implique que si f est holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$, alors

$$\sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = \sup_{z\in\partial\Omega} |f(z)|.$$

Pour un domaine Ω non borné, ceci n'est plus vrai. Par exemple, considérons

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\Im(z)| < \pi/2\},$$

et $f(z) = \exp(\exp(z))$. Pour x réel, on a

$$f(x \pm i\pi/2) = \exp(\pm i \exp(x)),$$

et donc $|f(x \pm i\pi/2)| = 1$. Autrement dit, pour tout $z \in \partial\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) = \pm\pi/2\}$, on a $|f(z)| = 1$. En revanche, $f(x) \to +\infty$ très rapidement quand $x \to +\infty$ le long de l'axe positif réel qui est inclus dans Ω. Ainsi, il n'y a aucun espoir de pouvoir contrôler le comportement de f à l'intérieur par le comportement de f sur la frontière. Cependant, si au préalable, on impose un contrôle de f à l'intérieur, alors on peut espérer obtenir des théorèmes de la forme suivante : si f est holomorphe sur Ω, continue sur $\overline{\Omega}$ et bornée sur $\partial\Omega$ et si

$$|f(z)| \leq |g(z)|, \qquad (z \in \Omega),$$

où g est une fonction réelle qui tend "assez lentement" vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers $+\infty$ dans Ω, alors f est en fait bornée dans Ω. L. Phragmen et E. Lindelöf ont développé une méthode qui permet de démontrer de tels résultats.

Dans ce cours, nous allons donner deux situations concrètes où la méthode de Phragmen–Lindelöf s'applique. Dans le premier cas, nous supposerons f bornée sur $\overline{\Omega}$ et le théorème améliorera la borne ; dans le deuxième cas, nous imposerons à f une hypothèse de croissance assez faible mais qui excluera malgré tout le cas de la fonction $f(z) = \exp(\exp(z))$ (qui a donné précédemment le contre-exemple au principe du maximum sur un domaine non borné).

Théorème 6.6.1 (Théorème des trois droites d'Hadamard) *Soient deux réels a, b tels que $a < b$ et soit Ω la bande définie par*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : a < \Re(z) < b\}.$$

On suppose que f est une fonction holomorphe sur Ω, continue et bornée sur $\overline{\Omega}$. Notons

$$M(x) = \sup\{|f(x+iy)| : -\infty < y < +\infty\},$$

pour tout $a \leq x \leq b$. Alors on a

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a}, \qquad (a \leq x \leq b). \tag{6.34}$$

Preuve : Pour $\varepsilon > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, introduisons la fonction f_ε définie dans $\overline{\Omega}$ par

$$f_\varepsilon(z) = \exp(\varepsilon z^2 + \lambda z) f(z), \qquad (z \in \overline{\Omega}).$$

La fonction f_ε est holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. De plus, pour $z = x+iy \in \overline{\Omega}$, on a

$$|\exp(\varepsilon z^2 + \lambda z)| = \exp(\varepsilon(x^2 - y^2) + \lambda x) = \exp(\varepsilon x^2 + \lambda x)\exp(-\varepsilon y^2). \tag{6.35}$$

Comme la fonction $x \longmapsto \exp(\varepsilon x^2 + \lambda x)$ est continue sur le compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et que f est bornée sur $\overline{\Omega}$, il existe une constante $K = K(\varepsilon, \lambda)$ telle que

$$|f_\varepsilon(z)| \leq K \exp(-\varepsilon y^2),$$

pour tout $z = x + iy \in \overline{\Omega}$. En particulier,

$$\lim_{|y| \to +\infty} f_\varepsilon(z) = 0, \tag{6.36}$$

uniformément par rapport à $a \leq x \leq b$. D'autre part, en utilisant (6.35), on a

$$|f_\varepsilon(a+iy)| \leq M(a)\exp(\varepsilon a^2 + \lambda a)\exp(-\varepsilon y^2) \leq M(a)\exp(\varepsilon a^2 + \lambda a), \tag{6.37}$$

et

$$|f_\varepsilon(b+iy)| \leq M(b)\exp(\varepsilon b^2 + \lambda b)\exp(-\varepsilon y^2) \leq M(b)\exp(\varepsilon b^2 + \lambda b). \tag{6.38}$$

En utilisant (6.36), il existe $y_0 > 0$ tel que

$$|y| \geq |y_0| \Longrightarrow |f_\varepsilon(x+iy)| \leq M, \qquad (a \leq x \leq b), \tag{6.39}$$

où

$$M = \max\left(M(a)\exp(\varepsilon a^2 + \lambda a), M(b)\exp(\varepsilon b^2 + \lambda b)\right).$$

Considérons R le rectangle dans Ω de sommets $a+iy_0$, $a-iy_0$, $b+iy_0$ et $b-iy_0$. D'après (6.37), (6.38) et (6.39), on a

$$|f_\varepsilon(z)| \leq M,$$

pour tout $z \in \partial R$ et le principe du maximum implique alors que

$$|f_\varepsilon(z)| \leq M,$$

pour tout $z \in R$. En utilisant une nouvelle fois (6.39), on en déduit finalement que

$$|f_\varepsilon(z)| \leq M,$$

pour tout $z \in \overline{\Omega}$. Fixons $z \in \Omega$ et faisons tendre $\varepsilon \to 0$. On obtient

$$|f(z)\exp(\lambda z)| \leq \max\left(M(a)\exp(\lambda(a), M(b)\exp(\lambda b)\right).$$

D'où

$$M(x) \leq \max\left(M(a)\exp(-\lambda(x-a), M(b)\exp(-\lambda(x-b)\right).$$

Il reste à minimiser le membre de droite en λ. Ce second membre est minimum lorsque

$$M(a)\exp(-\lambda(x-a)) = M(b)\exp(-\lambda(x-b)),$$

ce qui arrive si

$$\frac{M(a)}{M(b)} = \exp(\lambda(b-a)),$$

soit

$$\lambda = \frac{1}{b-a}\log\left(\frac{M(a)}{M(b)}\right).$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} M(a)\exp\left(-\lambda(x-a)\right) &= M(a)\exp\left(\frac{x-a}{b-a}\log\left(\frac{M(a)}{M(b)}\right)\right) \\ &= M(a)\left(\frac{M(b)}{M(a)}\right)^{\frac{x-a}{b-a}} \\ &= M(b)^{\frac{x-a}{b-a}}M(a)^{\frac{b-x}{b-a}}, \end{aligned}$$

et donc

$$M(x) \leq M(b)^{\frac{x-a}{b-a}}M(a)^{\frac{b-x}{b-a}},$$

ce qui donne (6.34) et achève la preuve.

□

Remarque 6.6.2 *Remarquons que* (6.34) *implique*

$$M(x) \leq \max(M(a), M(b)),$$

de sorte que $|f|$ ne dépasse pas dans Ω la borne supérieur de f sur la frontiére de Ω. Autrement dit, si on suppose que f est une fonction holomorphe sur une bande, continue et bornée sur la bande fermée, alors f vérifie le principe du maximum.

Corollaire 6.6.3 *Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : a < \Re(z) < b\}$, continue et bornée sur $\overline{\Omega}$. Alors la fonction $t \longmapsto \log M(t)$ est une fonction convexe sur $[a, b]$.*

Preuve : Soient $x, y \in [a, b]$, $x < y$ et $0 \leq \lambda \leq 1$. En appliquant le théorème précédent à x et y, on obtient que

$$M\left((1-\lambda)x + \lambda y\right)^{y-x} \leq M(x)^{(1-\lambda)(y-x)}M(y)^{\lambda(y-x)},$$

soit en passant un logarithme

$$(y-x)\log M((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)(y-x)\log M(x) + \lambda(y-x)\log M(y),$$

et en simplifiant par $y - x$, on a

$$\log M((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\log M(x) + \lambda \log M(y),$$

ce qui donne exactement l'inégalité de convexité de $\log M(t)$.

□

Théorème 6.6.4 (Théorème de Phragmen–Lindelöf) *Soit* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\Im(z)| < \pi/2\}$ *et soit* f *une fonction holomorphe sur* Ω *et continue sur* $\overline{\Omega}$*. On suppose qu'il existe des constantes* $\alpha < 1$ *et* $A < \infty$ *telles que*

$$|f(z)| \leq \exp(A\exp(\alpha|x|)), \qquad z = x + iy \in \Omega, \tag{6.40}$$

et

$$|f(z)| \leq 1, \qquad z \in \partial\Omega. \tag{6.41}$$

Alors $|f(z)| \leq 1$*, pour tout* $z \in \Omega$*.*

Preuve : Soient $\beta > 0$ tel que $\alpha < \beta < 1$ et $\varepsilon > 0$. Définissons

$$h_\varepsilon(z) = \exp(-\varepsilon(\exp(\beta z) + \exp(-\beta z))), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Pour $z = x + iy \in \overline{\Omega}$, on a

$$\Re(\exp(\beta z)+\exp(-\beta z)) = (\exp(\beta x) + \exp(-\beta x))\cos(\beta y) \geq \delta\left(\exp(\beta x) + \exp(-\beta x)\right),$$

où $\delta = \cos(\beta\pi/2) > 0$ (puisque $|\beta| < 1$). Donc

$$|h_\varepsilon(z)| = \exp(-\varepsilon\Re(\exp(\beta x)+\exp(-\beta x))) \leq \exp(-\varepsilon\delta(\exp(\beta x)+\exp(-\beta x))) \leq 1,$$

pour tout $z \in \overline{\Omega}$. En utilisant (6.40) et (6.41), on en déduit que

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1, \qquad z \in \partial\Omega, \tag{6.42}$$

et

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq \exp[(A\exp(\alpha|x|) - \varepsilon\delta(\exp(\beta x) + \exp(-\beta x))], \qquad z \in \overline{\Omega}. \tag{6.43}$$

Comme $\varepsilon\delta > 0$ et $\beta > \alpha$, le membre de droite dans (6.43) tend vers 0 lorsque $x \to \pm\infty$. Ainsi il existe $x_0 > 0$ tel que

$$\exp[A\exp(\alpha|x|) - \varepsilon\delta(\exp(\beta x) + \exp(-\beta x))] \leq 1,$$

pour tout $|x| \geq x_0$. Ainsi avec (6.43), on obtient que

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq 1, \tag{6.44}$$

pour tout $z \in \overline{\Omega}$, $|\Re(z)| \geq x_0$. Soit R le rectangle de sommet $x_0 + i\pi/2$, $x_0 - i\pi/2$, $-x_0 + i\pi/2$ et $-x_0 - i\pi/2$. En utilisant (6.42) et (6.44), on voit que

$$|f(z)h_\varepsilon| \leq 1,$$

pour tout $z \in \partial R$ et le principe du maximum implique que

$$|f(z)h_\varepsilon| \leq 1,$$

pour tout $z \in R$. Finalement en utilisant une nouvelle fois (6.44), on obtient que

$$|f(z)h_\varepsilon| \leq 1,$$

pour tout $z \in \overline{\Omega}$. Lorsque $\varepsilon \to 0$, on a $h_\varepsilon(z) \to 1$ pour tout z et on en déduit que

$$|f(z)| \leq 1,$$

pour tout $z \in \Omega$, ce qui conclut la preuve du théorème.

□

Remarque 6.6.5 *Remarquons que la condition $\alpha < 1$ dans le théorème 6.6.4 est optimale. En effet, comme on l'a vu au début de la section, la fonction* $\exp(\exp(z))$ *fournit un contre-exemple au résultat avec $\alpha = 1$.*

6.7 Le théorème de Riesz–Thorin et applications

6.7.1 Quelques préliminaires sur les espaces L^p

Soit $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace mesuré. On supposera dans tout ce chapitre que la mesure μ est positive. On note $L^p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$, l'espace des (classes d'équivalences de) fonctions f mesurables telles que

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} < +\infty.$$

L'espace $L^\infty(X)$ est défini de manière similaire en imposant que

$$\|f\|_\infty = \inf_{M>0} \{M : \mu\{t : |f(t)| > M\} = 0\} < +\infty.$$

Si $A \in \mathfrak{M}$ est une partie mesurable, on note χ_A la fonction caractéristique de A, c'est-à-dire la fonction définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Si $1 \leq p < +\infty$, il est facile de voir que $\chi_A \in L^p(X)$ si et seulement si $\mu(A) < +\infty$. Une fonction φ est dite *étagée* si on peut l'écrire comme une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques ; autrement dit, s'il existe des ensembles mesurables disjoints $A_1, A_2, \ldots A_n$ et des nombres complexes $a_1, a_2, \ldots a_n$ non nuls tels que

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}.$$

Si $\mu(A_k) < +\infty$, pour tout k, alors $\varphi \in L^p(X)$. Réciproquement, si $\varphi \in L^p(X)$, alors

$$|a_k|^p \chi_{A_k} \leq |\varphi|^p,$$

d'où

$$|a_k|^p \mu(A_k) \leq \|\varphi\|_p^p < +\infty,$$

et donc $\mu(A_k) < +\infty$. On a donc montré que si φ est une fonction étagée et si $1 \leq p < +\infty$, alors $\varphi \in L^p(X)$ si et seulement si $\mu(\{x : \varphi(x) \neq 0\}) < +\infty$.

On notera dans la suite $\mathcal{E}_p(X)$ l'ensemble des fonctions φ étagées telles que $\mu(\{x : \varphi(x) \neq 0\}) < +\infty$. Il est clair que $\mathcal{E}_p(X)$ est un sous-espace vectoriel de $L^p(X)$. Le résultat suivant rappelle une propriété fondamentale de ce sous-espace.

Lemme 6.7.1 *Soit $1 \leq p < +\infty$. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}_p(X)$ est dense dans $L^p(X)$.*

Preuve : Soit $f \in L^p(X)$.

Premier cas : supposons d'abord f positive. Il existe alors une suite croissante de fonctions étagées $\varphi_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$0 \leq \varphi_n \leq f$$

et (φ_n) tend vers f simplement μ-presque partout. Il est clair que $\varphi_n \in L^p(X)$, autrement dit $\varphi_n \in \mathcal{E}_p(X)$. De plus, comme $\varphi_n \geq 0$, on a

$$0 \leq (f - \varphi_n)^p \leq f^p.$$

Le théorème de convergence dominée permet alors d'obtenir que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - \varphi_n\|_p^p = \lim_{n\to+\infty} \int_X |f - \varphi_n|^p \, d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} |f - \varphi_n|^p \, d\mu = 0,$$

ce qui prouve que f peut être approchée dans $L^p(X)$ par une suite de fonctions de $\mathcal{E}_p(X)$.

Deuxième cas : supposons maintenant que f soit réelle. Notons par f_+ et f_- les fonctions définies par

$$f_+ = \frac{|f| + f}{2} \qquad f_- = \frac{|f| - f}{2}.$$

Les deux fonctions f_+ et f_- sont positives et dans $L^p(X)$. De plus, on a $f = f_+ - f_-$. D'après le premier cas, il existe deux suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ dans $\mathcal{E}_p(X)$ telles que

$$\|f_+ - \varphi_n\|_p \to 0 \quad \text{et} \quad \|f_+ - \psi_n\|_p \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Ainsi $\varphi_n - \psi_n \in \mathcal{E}_p(X)$ et avec l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$\|f - (\varphi_n - \psi_n)\|_p \leq \|f_+ - \varphi_n\|_p + \|f_- - \psi_n\|_p \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Dernier cas : f est à valeurs complexes. Il suffit de décomposer f en partie réelle et partie imaginaire et appliquer le cas précédent.

$\square$

En général, (sauf si la mesure μ est finie), il n'y a pas de relation d'inclusion entre les différents espaces $L^p(X)$. Cependant, nous avons le résultat suivant :

Lemme 6.7.2 *Soit* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *un espace mesuré, avec* $\mu \geq 0$. *Soit* $1 \leq p_0 \leq p \leq p_1 \leq +\infty$. *Alors on a*

$$L^p(X) \subset L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X).$$

Preuve : Soit $f \in L^p(X)$ et posons

$$f_1 = f\chi_{|f|>1} \quad \text{et} \quad f_2 = f\chi_{|f|\leq 1}.$$

Alors $f = f_1 + f_2$ et de plus, on a

$$\|f_1\|_{p_1}^{p_1} = \int_X |f|^{p_1}\, d\mu = \int_{|f|>1} |f|^{p_1}\, d\mu \leq \int_{|f|>1} |f|^p\, d\mu \leq \|f\|_p^p.$$

D'où $f_1 \in L^{p_1}(X)$ et $\|f_1\|_{p_1} \leq \|f\|_p^{p/p_1}$. Si $p_2 = +\infty$, alors il est clair que $|f_2| \leq 1$ presque partout et donc $f_2 \in L^\infty(X)$. Si $p_2 < +\infty$, alors on a

$$\|f_2\|_{p_2}^{p_2} = \int_X |f_2|^{p_2}\, d\mu = \int_{|f|\leq 1} |f|^{p_2}\, d\mu \leq \int_{|f|\leq 1} |f|^p\, d\mu \leq \|f\|_p^p,$$

d'où $f_2 \in L^{p_2}$ et $\|f_2\|_{p_2} \leq \|f\|_p^{p/p_2}$.

□

Dans le lemme 6.7.2, nous avons montré que si p est compris entre deux réels p_0 et p_1 alors L^p est contenu dans la somme $L^{p_0} + L^{p_1}$. Le résultat suivant donne un résultat "un peu inverse".

Lemme 6.7.3 (Inégalité de Lyapunov) *Soient* $1 \leq p_0, p_1 \leq +\infty$ *et* $0 < \theta < 1$. *Définissons* p *par*

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}.$$

Alors

$$L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X) \subset L^p(X),$$

et on a

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{\theta} \|f\|_{p_1}^{1-\theta}, \qquad \forall f \in L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X). \tag{6.45}$$

Preuve : Si $p = +\infty$, alors nécessairement $p_0 = p_1 = +\infty$ et l'inégalité (6.45) est alors évidente. Supposons maitenant $1 \leq p < +\infty$ et soit $f \in L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X)$. On écrit

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu = \int_X |f|^{(1-\theta)p} |f|^{\theta p} \, d\mu.$$

Si $p_0 = +\infty$, alors $p_1 = (1-\theta)p$ et on a donc

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^{p_1} |f|^{\theta p} \, d\mu \leq \|f\|_\infty^{\theta p} \|f\|_{p_1}^{p_1}.$$

D'où

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty^\theta \|f\|_{p_1}^{p_1/p} = \|f\|_{p_0}^\theta \|f\|_{p_1}^{1-\theta},$$

ce qui prouve (6.45) dans le cas où $p_0 = +\infty$. Si $p_1 = +\infty$, on raisonne de même. Supposons donc maintenant que $1 \leq p_0, p_1 < +\infty$ et posons alors $\alpha = p_0/(\theta p)$ et $\beta = p_1/((1-\theta)p)$. On vérifie que $1/\alpha + 1/\beta = 1$ et en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|f\|_p^p \leq \left(\int_X |f|^{p_0} \right)^{\theta p / p_0} \left(\int_X |f|^{p_1} \right)^{(1-\theta)p/p_1} = \|f\|_{p_0}^{\theta p} \|f\|_{p_1}^{(1-\theta)p},$$

ce qui termine la preuve.

□

En fait, en utilisant le lemme 6.7.1, on obtient le résultat suivant.

Lemme 6.7.4 *Soient* $1 \leq p_0, p_1 \leq +\infty$ *et* $0 < \theta < 1$. *Définissons* p *par*

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}.$$

Alors l'espace $L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X)$ *est dense dans* $L^p(X)$.

Preuve : Si $1 \leq p < +\infty$, cela découle du Lemme 6.7.1 car alors $\mathcal{E}_p(X)$ est contenu dans $L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X)$ et dense dans $L^p(X)$. Si $p = +\infty$, alors nécessairement $p_0 = p_1 = +\infty$ et $L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X) = L^\infty(X) = L^p(X)$.

□

Pour finir avec ces préliminaires concernant les espaces L^p, rappelons la notion de convergence en mesure. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. On dit que la suite $(f_n)_n$ converge en mesure vers f si pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Le résultat suivant regroupe les propriétés élémentaires de cette notion de convergence.

Lemme 6.7.5 *Soit $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables.*

(a) *Si f_n converge vers f dans $L^p(X)$, alors f_n converge vers f en mesure.*

(b) *Si f_n converge à la fois vers f et g en mesure, alors $f = g$ μ-presque partout.*

(c) *Si f_n converge vers f et g_n converge vers g en mesure, alors f_n+g_n converge vers $f + g$ en mesure.*

Preuve :

(a) : soit $\varepsilon > 0$ et notons

$$A_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}.$$

On a

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu(x) \geq \int_{A_n} |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu(x) \geq \varepsilon^p \mu(A_n).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient le point (a).

(b) : on a

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|,$$

d'où

$$\{x \in X : |f(x)-g(x)| > \varepsilon\} \subset \{x \in X : |f(x)-f_n(x)| > \varepsilon/2\} \cup \{x \in X : |f_n(x)-g(x)| > \varepsilon/2\},$$

et donc

$$\begin{aligned}\mu\left(\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}\right) &\leq \mu\left(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon/2\}\right) + \\ &\quad + \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| > \varepsilon/2\}\right).\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}\right) = 0,$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $f = g$ μ-presque partout.

(c) : On remarque que

$$\{x : |f_n(x)+g_n(x)-(f(x)+g(x))| > \varepsilon\} \subset \{x : |f_n(x)-f(x)| > \varepsilon/2\} \cup \{x : |g_n(x)-g(x)| > \varepsilon/2\}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| > \varepsilon\}\right) \quad &\le \quad \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon/2\}\right) \\ &\quad + \mu\left\{x \in X : |g_n(x) - g(x)| > \varepsilon/2\}\right), \end{aligned}$$

et on obtient le résultat en faisant tendre n vers $+\infty$.

$\square$

6.7.2 Le théorème de Riesz–Thorin

Soient $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ et $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ deux espaces mesurés. Soit $p, q \in [1, +\infty]$. Si un opérateur linéaire

$$\Lambda : L^p(X) \longrightarrow L^q(Y)$$

est borné, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\Lambda f\|_q \le C\|f\|_p,$$

pour toute fonction $f \in L^p(X)$, alors on dit que l'opérateur Λ est de *type* (p, q) et on note sa norme par

$$\|\Lambda\|_{(p,q)} = \sup_{\substack{f \in L^p(X) \\ f \neq 0}} \frac{\|\Lambda f\|_q}{\|f\|_p}.$$

On suppose maintenant que l'opérateur Λ est défini sur l'ensemble

$$L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X) = \{f + g : f \in L^{p_0}(X) \text{ et } g \in L^{p_1}(X)\}$$

et est de type (p_0, q_0) et (p_1, q_1). Autrement dit, si on restreint Λ à $L^{p_0}(X)$ et $L^{p_1}(X)$, alors les deux opérateurs

$$\Lambda : L^{p_0}(X) \longrightarrow L^{q_0}(Y)$$

et

$$\Lambda : L^{p_1}(X) \longrightarrow L^{q_1}(Y)$$

sont bien définis et bornés. Maintenant, si p est choisi entre p_0 et p_1, la question naturelle qui se pose est : peut-on trouver q entre q_0 et q_1 tels que

$$\Lambda : L^{p}(X) \longrightarrow L^{q}(Y)$$

est bien défini et borné ? Le théorème d'interpolation de Riesz–Thorin répond à cette question.

Théorème 6.7.6 (Théorème d'interpolation de Riesz–Thorin) *Soient* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *et* $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ *deux espaces mesurés. Soient* $p_0, q_0, p_1, q_1 \in [1, +\infty]$. *Supposons que*

$$\Lambda : L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X) \longrightarrow L^{q_0}(Y) + L^{q_1}(Y)$$

est une application linéaire de types (p_0, q_0) *et* (p_1, q_1). *Soient* $t \in [0, 1]$ *et définissons*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Alors $\Lambda : L^{p_t}(X) \longrightarrow L^{q_t}(Y)$ *est une application linéaire de type* (p_t, q_t) *et on a*

$$\|\Lambda\|_{(p_t,q_t)} \leq \|\Lambda\|^{1-t}_{(p_0,q_0)} \|\Lambda\|^{t}_{(p_1,q_1)}.$$

Preuve : Fixons $t \in]0, 1[$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $p_0 \leq p_1$. On considère trois cas.

Premier cas : $p_t, q_t \in]1, +\infty[$. Dans ce cas, on dispose de deux propriétés importantes : tout d'abord, $L^{q_t}(Y)$ est le dual de $L^{q'_t}(Y)$, où $1/q_t + 1/q'_t = 1$; de plus, les fonctions étagées sont denses dans $L^{p_t}(X)$ et $L^{q'_t}(Y)$ (voir lemme 6.7.1).

Soit $\varphi \in \mathcal{E}_{p_t}(X)$. Puisque $\varphi \in L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X)$, le lemme 6.7.3 permet d'écrire que $\Lambda(\varphi) \in L^{q_0}(Y) \cap L^{p_1}(Y) \subset L^{q_t}(Y)$. De plus, par dualité, on a

$$\|\Lambda\varphi\|_{q_t} = \sup_{\substack{\psi \in L^{q_t'}(Y) \\ \|\psi\|_{q_t'} \leq 1}} \left| \int_Y (\Lambda\varphi)\psi \, d\nu \right|.$$

En utilisant la densité de $\mathcal{E}_{q_t'}(Y)$ dans $L^{q_t'}(Y)$, on obtient que

$$\|\Lambda\varphi\|_{q_t} = \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{E}_{q_t'}(Y) \\ \|\psi\|_{q_t'} \leq 1}} \left| \int_Y (\Lambda\varphi)\psi \, d\nu \right|.$$

Pour estimer l'intégrale $\int_Y (\Lambda\varphi)\psi \, d\nu$, nous allons appliquer le théorème des trois droites d'Hadamard (théorème 6.6.1). Puisque φ et ψ sont des fonctions étagées de $\mathcal{E}_{p_t}(X)$ et $\mathcal{E}_{q_t'}(Y)$ respectivement, on peut écrire

$$\varphi = \sum_m r_m e^{i\theta_m} \chi_{A_m} \quad \text{et} \quad \psi = \sum_n \rho_n e^{i\vartheta_n} \chi_{B_n},$$

où $r_m, \rho_n > 0$, $A_m \in \mathfrak{M}$ et $B_n \in \mathfrak{N}$ avec $\mu(A_m) < +\infty$ et $\nu(B_n) < +\infty$, et chaque somme possède un nombre fini de termes. Pour $z \in \mathbb{C}$, définissons

$$\varphi_z = \sum_m r_m^{p_t\left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}\right)} e^{i\theta_m} \chi_{A_m} \quad \text{et} \quad \psi_z = \sum_n \rho_n^{q_t'\left(\frac{1-z}{q_0'} + \frac{z}{q_1'}\right)} e^{i\vartheta_n} \chi_{B_n}.$$

On remarque que $\varphi_t = \varphi$ et $\psi_t = \psi$. Comme les ensembles $(A_m)_m$ (respectivement $(B_n)_n$) sont disjoints, pour tout $\alpha > 0$, on a

$$|\varphi_{x+iy}|^\alpha = \sum_m r_m^{\alpha p_t\left(\frac{1-x}{p_0} + \frac{x}{p_1}\right)} \chi_{A_m} \quad \text{et} \quad |\psi_{x+iy}|^\alpha = \sum_n \rho_n^{\alpha q_t'\left(\frac{1-x}{q_0'} + \frac{x}{q_1'}\right)} \chi_{B_n}.$$

En particulier, on a

$$|\varphi_{iy}|^{p_0} = |\varphi_{1+iy}|^{p_1} = |\varphi|^{p_t}, \tag{6.46}$$

et

$$|\psi_{iy}|^{q_0'} = |\psi_{1+iy}|^{q_1'} = |\psi|^{q_t'}. \tag{6.47}$$

Soit

$$F(z) = \int_Y (\Lambda\varphi_z)\psi_z \, d\nu, \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Un calcul élémentaire montre que

$$F(z) = \sum_m \sum_n e^{i(\theta_m + \vartheta_n)} \left(\int_Y (\Lambda \chi_{A_m}) \chi_{B_n} \, d\nu \right) r_m^{p_t\left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}\right)} \rho_n^{q'_t\left(\frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}\right)}.$$

Clairement F est une fonction entière et

$$F(t) = \int_Y (\Lambda \varphi) \psi \, d\nu.$$

Soit S la bande

$$S = \{x + iy : 0 < x < 1, y \in \mathbb{R}\}.$$

Puisque

$$\left| r_m^{p_t\left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}\right)} \rho_n^{q'_t\left(\frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}\right)} \right| = r_m^{p_t\left(\frac{1-x}{p_0} + \frac{x}{p_1}\right)} \rho_n^{q'_t\left(\frac{1-x}{q'_0} + \frac{x}{q'_1}\right)},$$

la fonction F est bornée sur $\overline{S}$. De plus, en utilisant l'inégalité de Hölder, on a sur la droite verticale $\Re(z) = 0$,

$$\begin{aligned}
|F(iy)| &= \left| \int_Y (\Lambda \varphi_{iy}) \psi_{iy} \, d\nu \right| \\
&\leq \left(\int_Y |\Lambda \varphi_{iy}|^{q_0} \, d\nu \right)^{\frac{1}{q_0}} \left(\int_Y |\psi_{iy}|^{q'_0} \right)^{\frac{1}{q'_0}} \\
&\leq \|\Lambda\|_{(p_0, q_0)} \left(\int_X |\varphi_{iy}|^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \left(\int_Y |\psi_{iy}|^{q'_0} \right)^{\frac{1}{q'_0}}.
\end{aligned}$$

D'où, d'après (6.46), (6.47) et le fait que $\|\psi\|_{q'_t} \leq 1$, on obtient

$$|F(iy)| \leq \|\Lambda\|_{(p_0, q_0)} \|\varphi\|_{p_t}^{p_t/p_0}. \tag{6.48}$$

De façon similaire, sur la droite $\Re(z) = 1$, on a

$$\begin{aligned}
|F(1 + iy)| &= \left| \int_Y (\Lambda \varphi_{1+iy}) \psi_{1+iy} \, d\nu \right| \\
&\leq \left(\int_Y |\Lambda \varphi_{1+iy}|^{q_1} \, d\nu \right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_Y |\psi_{1+iy}|^{q'_1} \right)^{\frac{1}{q'_1}} \\
&\leq \|\Lambda\|_{(p_1, q_1)} \left(\int_X |\varphi_{1+iy}|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_Y |\psi_{1+iy}|^{q'_1} \right)^{\frac{1}{q'_1}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant une nouvelle fois (6.46), (6.47) et le fait que $\|\psi\|_{q_t'} \leq 1$, on obtient

$$|F(1+iy)| \leq \|\Lambda\|_{(p_1,q_1)} \|\varphi\|_{p_t}^{p_t/p_1}. \tag{6.49}$$

En appliquant le théorème 6.6.1 en tenant compte de (6.48) et (6.49), on en déduit que

$$\begin{aligned} |F(t)| &\leq \left(\|\Lambda\|_{(p_0,q_0)} \|\varphi\|_{p_t}^{p_t/p_0}\right)^{1-t} \left(\|\Lambda\|_{(p_1,q_1)} \|\varphi\|_{p_t}^{p_t/p_1}\right)^t \\ &= \|\Lambda\|_{(p_0,q_0)}^{1-t} \|\Lambda\|_{(p_1,q_1)}^t \|\varphi\|_{p_t}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left| \int_Y (\Lambda\varphi)\psi \, d\nu \right| \leq \|\Lambda\|_{(p_0,q_0)}^{1-t} \|\Lambda\|_{(p_1,q_1)}^t \|\varphi\|_{p_t}.$$

En prenant le supremum sur tous les ψ tels que $\|\psi\|_{q_t'} \leq 1$, on obtient finalement

$$\|\Lambda\varphi\|_{q_t} \leq \|\Lambda\|_{(p_0,q_0)}^{1-t} \|\Lambda\|_{(p_1,q_1)}^t \|\varphi\|_{p_t}, \tag{6.50}$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}_{p_t}(X)$. Il reste à montrer que (6.50) est valable pour toute fonction de $L^{p_t}(X)$.

Soit $f \in L^{p_t}(X)$. Comme $1 < p_t < +\infty$, il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{E}_{p_t}(X)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n - f\|_{p_t} = 0. \tag{6.51}$$

Si on peut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \|\Lambda\varphi_n - \Lambda f\|_{q_t} = 0, \tag{6.52}$$

alors on en déduira automatiquement que (6.50) est vérifiée par f et la preuve du premier cas sera terminée. On peut bien sûr supposer que $p_0 < p_t < p_1$ (car dans les cas $p_t = p_0$ ou $p_t = p_1$, l'égalitée (6.52) est satisfaite par hypothèse). Puisque $(\varphi_n)_n$ est convergente dans $L^{p_t}(X)$, c'est en particulier une suite de Cauchy et donc d'après (6.50), $(\Lambda\varphi_n)_n$ est aussi une suite de Cauchy dans $L^{q_t}(Y)$. Par conséquent, il existe $g \in L^{q_t}(Y)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|\Lambda\varphi_n - g\|_{q_t} = 0.$$

Nous allons montrer que $\Lambda\varphi_n$ converge en mesure vers Λf, ce qui suffira pour en déduire que $g = \Lambda f$ et donc obtenir (6.51). Soit

$$\varepsilon_n = \|f - \varphi_n\|_{p_t},$$

et

$$S_n = \{x \in X : |f(x) - \varphi_n(x)| > \varepsilon_n\}.$$

Clairement sans perte de généralité, on peut supposer que $\varepsilon_n > 0$ (sinon f serait une fonction de $\mathcal{E}_{p_t}(X)$ et on sait que (6.50) est satisfaite pour ces fonctions). D'après l'inégalité de Chebyshev, on a

$$\begin{aligned} \mu(S_n) &= \int_{S_n} d\mu \le \int_{S_n} \left|\frac{f-\varphi_n}{\varepsilon_n}\right|^{p_t} d\mu \\ &\le \frac{\|f-\varphi_n\|_{p_t}^{p_t}}{\varepsilon_n^{p_t}} = 1. \end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder avec $\alpha = p_t/p_0$ donne alors

$$\begin{aligned} \|(f-\varphi_n)\chi_{S_n}\|_{p_0}^{p_0} &= \int_X |f-\varphi_n|^{p_0}\chi_{S_n}\, d\mu \\ &\le \left(\int_X |f-\varphi_n|^{\alpha p_0}\, d\mu\right)^{1/\alpha} \left(\int_X |\chi_{S_n}|^{\alpha'}\, d\mu\right)^{1/\alpha'} \\ &= \|f-\varphi_n\|_{p_t}^{p_0} \left(\mu(S_n)\right)^{1/\alpha'} \\ &\le \|f-\varphi_n\|_{p_t}^{p_0}. \end{aligned} \tag{6.53}$$

D'autre part sur $X \setminus S_n$, on a $|f-\varphi_n|/\varepsilon_n \le 1$ et par conséquent (rappelons que $p_0 \le p_t \le p_1$), on a

$$\int_{X\setminus S_n} \left|\frac{f-\varphi_n}{\varepsilon_n}\right|^{p_1} d\mu \le \int_{X\setminus S_n} \left|\frac{f-\varphi_n}{\varepsilon_n}\right|^{p_t} d\mu \le \frac{\|f-\varphi_n\|_{p_t}^{p_t}}{\varepsilon_n^{p_t}} = 1,$$

ce qui donne

$$\|(f-\varphi_n)\chi_{X\setminus S_n}\|_{p_1} \le \varepsilon_n = \|f-\varphi_n\|_{p_t}. \tag{6.54}$$

On déduit donc de (6.53), (6.54) et (6.51) que

$$\lim_{n\to+\infty} \|(f-\varphi_n)\chi_{S_n}\|_{p_0} = \lim_{n\to+\infty} \|(f-\varphi_n)\chi_{X\setminus S_n}\|_{p_1} = 0.$$

Comme Λ est de type (p_0, q_0) et de type (p_1, q_1), on peut conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \|\Lambda((f-\varphi_n)\chi_{S_n})\|_{q_0} = \lim_{n\to+\infty} \|\Lambda((f-\varphi_n)\chi_{X\setminus S_n})\|_{q_1} = 0.$$

D'après le lemme 6.7.5, cela implique en particulier que

$$\Lambda((f-\varphi_n)\chi_{S_n}) \to 0 \quad \text{et} \quad \Lambda((f-\varphi_n)\chi_{X\setminus S_n}) \to 0,$$

en mesure lorsque $n \to +\infty$. D'où $\Lambda(f-\varphi_n) = \Lambda((f-\varphi_n)\chi_{S_n}) + \Lambda((f-\varphi_n)\chi_{X\setminus S_n})$ tend aussi en mesure vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$. Ceci prouve que $\Lambda(\varphi_n)$ converge vers Λf en mesure, ce qui conclut la preuve du premier cas.

Deuxième cas : $p_t \in]1, +\infty[$ et $q_t = 1$ ou $q_t = +\infty$. Dans ce cas, on a nécessairement $q_0 = q_1 = q_t$. Soit x^* un élément quelconque du dual de $L^{q_t}(Y)$ et définissons

$$F(z) = x^*\left(\Lambda\varphi_z\right),$$

où φ est une fonction de $\mathcal{E}_{p_t}(X)$ et φ_z est définie comme dans le premier cas. Par conséquent, on a

$$|F(iy)| \leq \|x^*\| \|\Lambda\varphi_{iy}\|_{q_0} \leq \|x^*\| \|\Lambda\|_{(p_0,q_0)} \|\varphi\|_{p_t}^{p_t/p_0},$$

et

$$|F(1+iy)| \leq \|x^*\| \|\Lambda\varphi_{1+iy}\|_{q_1} \leq \|x^*\| \|\Lambda\|_{(p_1,q_1)} \|\varphi\|_{p_t}^{p_t/p_1}.$$

On vérifie aussi facilement que F est bornée sur la bande $\overline{S}$. Le théorème 6.6.1 implique alors que

$$|x^*(\Lambda\varphi)| = |F(t)| \leq \|x\|^* \|\Lambda\|_{(p_0,q_0)}^{1-t} \|\Lambda\|_{(p_1,q_1)}^{t} \|\varphi\|_{p_t}.$$

Finalement le théorème d'Hahn–Banach implique que

$$\|\Lambda\varphi\|_{q_t} \leq \|\Lambda\|_{(p_0,q_0)}^{1-t} \|\Lambda\|_{(p_1,q_1)}^{t} \|\varphi\|_{p_t},$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}_{p_t}(X)$. La suite se prouve exactement comme dans le premier cas.

Troisième cas : $p_t = 1$ ou $p_t = +\infty$. Dans ce cas, on a nécessairement $p_0 = p_1 = p_t$. Soit $f \in L^{p_t}(X)$. D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\|\Lambda f\|_{q_t} &\leq \|\Lambda f\|_{q_0}^{1-t}\|\Lambda f\|_{q_1}^{t} \\
&\leq \left(\|\Lambda\|_{(p_0,q_0)}\|f\|_{p_0}\right)^{1-t}\left(\|\Lambda\|_{(p_1,q_1)}\|f\|_{p_1}\right)^{t} \\
&= \|\Lambda\|_{(p_0,q_0)}^{1-t}\|\Lambda\|_{(p_1,q_1)}^{t}\|f\|_{p_1},
\end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème dans ce dernier cas.

□

6.7.3 Application : l'inégalité de Hausdorff–Young

Dans cette section, nous allons donner un résultat concernant la transformée de Fourier des fonctions définies sur $\mathbb{T}$. Il existe aussi un résultat analogue pour la transformée de Fourier des fonctions définis sur l'axe réel.

Théorème 6.7.7 (Théorème de Hausdorff–Young) *Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq 2$. Alors, $\hat{f}$, la transformée de Fourier de f, appartient à $\ell^q(\mathbb{Z})$, où q est l'exposant conjugué de p. De plus, on a*

$$\|\hat{f}\|_q \leq \|f\|_p.$$

Preuve : Rappelons que, pour toute fonction f intégrable sur $\mathbb{T}$, on définit $\hat{f}(n)$ par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{in\theta})e^{-in\theta}\,d\theta, \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

On a donc facilement

$$|\hat{f}(n)| \leq \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi} = \|f\|_1.$$

Maintenant si $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a avec l'égalité de Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|\hat{f}\|_2^2.$$

Ainsi l'opérateur $T : f \longmapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un opérateur de type $(1,\infty)$ et de type $(2,2)$. Ainsi le théorème de Riesz–Thorin implique que T est de type (r,s) où r et s sont tels que

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{s} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2},$$

et $\theta \in (0,1)$. Ceci donne

$$r = \frac{1}{1-\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad s = \frac{1}{1-\frac{1}{r}}.$$

Or quand θ parcourt l'intervalle $(0,1)$, r parcourt l'intervalle $(1,2)$. De plus, s est l'exposant conjugué de r. Ceci implique donc que pour tout $p \in [1,2]$, l'opérateur T est de type (p,q). De plus, le théorème de Riesz–Thorin dit aussi que

$$\|T\|_{(p,q)} \leq \|T\|_{(1,\infty)}^{1-\theta}\|T\|_{(2,2)}^{\theta}.$$

Comme $\|T\|_{(1,\infty)} \leq 1$ et $\|T\|_{(2,2)} \leq 1$, on obtient que $\|T\|_{(p,q)} \leq 1$. Ainsi, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$, on a $\hat{f} \in \ell^q(\mathbb{Z})$ et $\|\hat{f}\|_q \leq \|f\|_p$.

$\square$

6.8 Exercices

Exercice 6.8.1 *Le but de l'exercice est de montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 \tag{6.55}$$

et

$$\pi \, cotan(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}. \tag{6.56}$$

(a) *Posons*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

(i) *Montrer que la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et est 1-périodique.*

(ii) *Montrer que les fonctions $z \longmapsto f(z) - \dfrac{1}{z^2}$ et $z \longmapsto \left(\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$ se prolonge par continuité en 0.*

(iii) *En déduire que la fonction*

$$F : z \longmapsto f(z) - \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

(iv) *Montrer que F est bornée sur $\mathbb{C}$.*

(v) *Montrer que $F(iy) \to 0$, lorsque $y \to +\infty$ et en déduire* (6.55).

(b) *Posons*

$$g(z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} - \pi \, cotan(\pi z).$$

(i) *Montrer que g est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.*

(ii) *En écrivant*

$$\frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n},$$

montrer que $g' \equiv 0$.

(iii) *En déduire* (6.56)

Exercice 6.8.2 (Développement du sinus en produit infini) *Le but de l'exercice est de montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \tag{6.57}$$

(a) *Posons*

$$f(z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

(i) *Montrons que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

(ii) *Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - z^2}.$$

(iii) *Soit $u(z) = \dfrac{f(z)}{\sin(\pi z)}$. Montrer que u est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a $u'(z) = 0$.*

Indication : *on pourra calculer d'abord $u'(z)/u(z)$ et utiliser la question* (ii) *et l'exercice 6.8.1.*

(iv) *En déduire que $u \equiv 1$ et la formule* (6.57).

(b) *Retrouver la formule* (6.57) *en utilisant le théorème de factorisation d'Hadamard (théorème 6.5.3).*

Exercice 6.8.3 (Développement de ζ en produit infini) *Soit*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \Re(s) > 1.$$

(a) *Montrer que ζ est une fonction holomorphe sur le demi-plan $\Pi_1 = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$.*

(b) *Soit $(p_n)_{n \geq 0}$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant et posons*

$$F(s) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right).$$

Montrer que F définit une fonction holomorphe sur Π_1 qui ne s'annule pas.

(c) *Pour $N \in \mathbb{N}$, notons A_N l'ensemble des entiers qui ne sont divisibles par aucun des nombres premiers $p_0, p_1, \dots, p_N$ et posons*

$$F_N(s) = \prod_{n=0}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right).$$

(i) *Montrer que*

$$\zeta(s) F_N(s) = \sum_{k \in A_N} \frac{1}{k^s}.$$

(ii) *Montrer que*

$$|\zeta(s) F_N(s) - 1| \leq \sum_{k > p_N} \frac{1}{|k|^{\Re(s)}}.$$

(iii) *En déduire que pour $\Re(s) > 1$, alors $\zeta(s) \neq 0$ et*

$$\zeta(s) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^{-1}.$$

Exercice 6.8.4 *Montrer que la série*

$$\sum_n \frac{1}{p_n}$$

est divergente.

<u>Indication :</u> *on pourra utiliser l'exercice 6.8.3.*

Exercice 6.8.5 (Une formule pour la fonction Γ) *Soit*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt, \qquad \Re(z) > 0.$$

(a) *Montrer que Γ est holomorphe sur le demi-plan $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$.*

(b) *Montrer que $\Gamma(1) = 1$ et que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.*

(c) *Montrer que $\Gamma(n) = (n-1)!$, pour tout entier $n \geq 1$.*

(d) *Dans cette question, on veut démontrer que*

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}. \tag{6.58}$$

(i) *Soit*

$$I_n(z) = \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Montrer que $\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} I_n(z)$.

(ii) *Soit*

$$J_n(z) = \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^n \, du.$$

Montrer que $J_n(z) = \frac{n}{z} J_{n-1}(z+1)$, *pour* $n \geq 1$, *puis que*

$$J_n(z) = \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}.$$

(iii) *En déduire* (6.58).

Exercice 6.8.6 (Développement de $1/\Gamma$ en produit infini) *Le but de l'exercice est de montrer que si* $\Re(z) > 0$, *alors* $\Gamma(z) \neq 0$ *et*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}, \tag{6.59}$$

où γ *est la constante d'Euler, définie par*

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right).$$

(a) *Montrer que*

$$\frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!n^z} = z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z\log n}.$$

(b) *Montrer que*

$$\frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!n^z} = ze^{\gamma_n z} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}},$$

où γ_n *est une suite qui tend vers* γ *quand* $n \to +\infty$.

(c) *Montrer que le produit infini*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

converge et définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(d) *En déduire que* $\Gamma(z) \neq 0$*, pour* $\Re(z) > 0$ *et la formule* (6.59).

Remarque : *cet exercice montre aussi que la fonction* $1/\Gamma$ *se prolonge en une fonction entière dont les zéros, tous simples, sont les entiers négatifs ou nuls. Autrement dit, la fonction* Γ *se prolonge en une fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$ *dont les pôles, tous simples, sont les entiers négatifs ou nuls.*

Exercice 6.8.7 (La formule des compléments) *Montrer que, pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$*, on a*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{6.60}$$

Indication : *on pourra tout d'abord supposer que* $0 < \Re(z) < 1$ *et utiliser les exercices 6.8.2 et 6.8.5.*

Exercice 6.8.8 (Critères d'Abel) *Soit* $(a_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions définies sur un même ensemble* X*, et soit* $(b_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions définies sur un même ensemble* Y*.*

(a) *On suppose que les sommes partielles de la série* $\sum a_n$ *sont uniformément bornées sur* X*, que* $b_n(y)$ *tend vers* 0 *uniformément sur* Y*, et que la série* $\sum(b_{n+1} - b_n)$ *est uniformément absolument convergente sur* Y*. Montrer alors que la série de fonctions* $\sum a_n(x)b_n(y)$ *converge uniformément sur* $X \times Y$*.*

(b) *On suppose que la série* $\sum a_n$ *converge uniformément sur* X*, que la suite* (b_n) *est uniformément bornée, et qu'il existe une constante* C *telle que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |b_{n+1}(y) - b_n(y)| \leq C,$$

pour tout $y \in Y$*. Montrer que la série de fonctions* $\sum a_n(x)b_n(y)$ *converge uniformément sur* $X \times Y$*.*

Exercice 6.8.9 (Une autre démonstration du lemme 6.3.1) (a) *En utilisant un des critères d'Abel (voir exercice 6.8.8), montrer que la série* $\sum \frac{z^n}{n}$ *converge uniformément sur tout compact de* $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$*.*

(b) *En déduire que pour tout point* $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$, *on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{n} = -\mathrm{Log}(1-\zeta).$$

(c) *En déduire que*

$$\int_0^{2\pi} \log|1-e^{it}|\,dt = 0.$$

Exercice 6.8.10 (Les produits de Blaschke dans le disque unité) *Notons* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *le disque unité du plan complexe et soit* $(a_n)_{n\geq 1}$ *une suite de points de* $\mathbb{D}$ *telle que*

$$\sum_{n\geq 1}(1-|a_n|) < +\infty.$$

Notons

$$B(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{|a_n|}{a_n}\,\frac{a_n - z}{1-\overline{a_n}z}\right).$$

(a) *Montrer que* B *définit une fonction holomorphe sur* $\mathbb{D}$ *dont les zéros sont exactement les points de la suite* $(a_n)_{n\geq 1}$.

(b) *Montrer que, pour tout* $u, v \in \mathbb{C}$, $\overline{u}v \neq 1$, *on a*

$$1 - \left|\frac{u-v}{1-\overline{u}v}\right| = \frac{(1-|u|^2)(1-|v|^2)}{|1-\overline{u}v|^2}.$$

(c) *En déduire que* B *est borné sur* $\mathbb{D}$ *et* $\|B\|_\infty \leq 1$.

Exercice 6.8.11 (La classe de Nevanlinna) *On dit qu'une fonction* f *holomorphe dans* $\mathbb{D}$ *appartient à la classe de Nevanlinna* $\mathcal{N}$ *si elle vérifie*

$$\sup_{r<1}\left(\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta\right) < +\infty,$$

où $\log^+(t) = \max(\log t, 0)$. *Soit* $f \in \mathcal{N}$ *et soit* $(a_n)_{n\geq 1}$ *la suite des zéros de* f *dans* $\mathbb{D}$, *chaque zéro étant compté avec sa multiplicité. Le but de l'exercice est de montrer que si* $f \equiv 0$, *alors*

$$\sum_{n\geq 1}(1-|a_n|) < +\infty. \tag{6.61}$$

(a) *Montrer qu'on peut supposer que* $f(0) \neq 0$ *et que la suite* $(a_n)_{n\geq 1}$ *comporte une infinité de termes.*

(b) *Montrer alors que*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 1.$$

Quitte à permuter les $(a_n)_{n\geq 1}$, *on peut supposer que la suite* $(|a_n|)_{n\geq 1}$ *est croissante. Posons*

$$n(r) = \max\{n : |a_n| \leq r\}, \qquad (0 \geq r < 1).$$

(c) *Montrer que* $n(r)$ *est bien défini, que la fonction* $r \longmapsto n(r)$ *est croissante et que*

$$\lim_{r\to 1} n(r) = +\infty.$$

(d) *Montrer que pour tout* $r \leq s < 1$, *on a*

$$\sum_{n\leq n(r)} \log\left|\frac{s}{a_n}\right| \leq -\log|f(0)| + \int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

(e) *En déduire que la série*

$$\sum_{n\geq 1} \log \frac{1}{|a_n|}$$

est convergente puis que la condition (6.61) *est vérifiée.*

Exercice 6.8.12 (Zéros des fonctions holomorphes et bornées dans $\mathbb{D}$) *Soit* $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$. *Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe une fonction* f *holomorphe et bornée dans* $\mathbb{D}$, *non indentiquement nulle et qui s'annule en* a_n *(avec multiplicité).*

(ii) *On a*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|) < +\infty.$$

Indication : *utiliser les exercices 6.8.10 et 6.8.11.*

Exercice 6.8.13 (Fonctions entières de type exponentiel) *Soit F une fonction entière de type exponentiel, c'est-à-dire qu'il existe une constante réelle $C > 0$ telle que*

$$F(z) = O(e^{c|z|}), \qquad |z| \to +\infty.$$

On suppose que $F(0) = 1$ et que F ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que

$$F(z) = e^{\alpha z}, \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Indication : *introduire une fonction entière G telle que $F = e^G$ et utiliser le théorème de Borel–Carathéodory (théorème 6.4.1).*

Exercice 6.8.14 (Un théorème de Kahane–Gleason–Zelazko) *Une algèbre unitaire $\mathfrak{A}$ sur $\mathbb{C}$ est appelée une algèbre de Banach si $\mathfrak{A}$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$ telle que*

(i) $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|)$ *est un espace de Banach.*

(ii) $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, *pour tous $a, b \in \mathfrak{A}$.*

(iii) $\|e\| = 1$ *(où e désigne l'élément unité de l'algèbre).*

Le spectre d'un élément $a \in \mathfrak{A}$, noté $\sigma(a)$, est défini par

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \notin Inv(\mathfrak{A})\},$$

où $Inv(\mathfrak{A})$ désigne l'ensemble des éléments inversibles de l'algèbre $\mathfrak{A}$. On peut montrer (même preuve que dans le cas de $\mathcal{L}(H)$) que $\sigma(a)$ est toujours un compact non vide de $\mathbb{C}$.

On considère Θ une forme linéaire sur une algèbre de Banach $\mathfrak{A}$ commutative et on suppose que, pour tout $a \in Inv(\mathfrak{A})$, on a $\Theta(a) \neq 0$. Le but de l'exercice est de montrer que Θ est un caractère de $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire une forme linéaire sur $\mathfrak{A}$ qui est en plus multiplicative :

$$\Theta(ab) = \Theta(a)\Theta(b), \qquad a, b \in \mathfrak{A}.$$

(a) *Montrer que pour tout* $a \in \mathfrak{A}$, $\Theta(a) \in \sigma(a)$. *En déduire que* Θ *est continue avec* $\|\Theta\| \leq 1$.

(b) *Soit* $a \in \mathfrak{A}$ *fixé. Pour* $z \in \mathbb{C}$, *on définit*

$$\exp(za) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n a^n}{n!}.$$

Montrer que la série converge dans $\mathfrak{A}$ *et que la définition a donc un sens.*

(c) *On pose* $F(z) = \Theta(\exp(za))$, $z \in \mathbb{C}$. *Montrer qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{C}$ *telle que*

$$F(z) = e^{\alpha z}, \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Indication : *utiliser l'exercice 6.8.13.*

(d) *En déduire que* $\Theta(a^2) = \Theta(a)^2$, *pour tout* $a \in \mathfrak{A}$.

(e) *Conclure.*

Exercice 6.8.15 (Un principe de Phragmen–Lindelöf dans un secteur) *Pour* $\alpha \geq 1$, *posons*

$$\Omega_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2\alpha} < \arg_{]-\pi/2,\pi/2[}(z) < \frac{\pi}{2\alpha} \right\}.$$

Soient f *une fonction holomorphe sur* Ω_α *et continue sur* $\overline{\Omega_\alpha}$. *Supposons qu'il existe une constante* $M > 0$ *et* $\beta < \alpha$ *telle que*

$$|f(z)| \leq M, \qquad z \in \partial\Omega_\alpha,$$

et

$$f(z) = O\left(e^{|z|^\beta}\right), \qquad z \in \Omega_\alpha, |z| \to +\infty,$$

le grand O *étant uniforme en* $\theta = \arg z$. *Montrer que, pour tout* $z \in \Omega_\alpha$, *on a*

$$|f(z)| \leq M.$$

Indication : *soit* $\beta < \gamma < \alpha$ *et* $\varepsilon > 0$. *Considérer* $F(z) = f(z)e^{-\varepsilon z^\gamma}$.

Exercice 6.8.16 (Un théorème de F. Carlson, 1914) *Le but de l'exercice est de prouver le résultat suivant : soit f une fonction holomorphe sur $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ et continue sur $\overline{\Pi_+}$ telle que*

(i) $f(z) = O\left(e^{k|z|}\right)$, *pour* $\Re(z) \geq 0$, *où* $k \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(z) = O\left(e^{-a|z|}\right)$ *pour* $z \in i\mathbb{R}$, *où* $a > 0$.

Alors $f \equiv 0$.

(a) *Montrer que pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $0 \leq \theta = \arg_{]-\pi/2,\pi/2[}(z) \leq \frac{\pi}{2}$, *on a*

$$f(z) = O\left(\exp((k\cos\theta - a|\sin\theta|)r)\right), \tag{6.62}$$

où le O *est uniforme en* θ.

Indication : *appliquer le résultat de l'exercice 6.8.15 à* $F(z) = f(z)e^{-(k+ia)z}$.

(b) *Montrer que l'estimation* (6.62) *est aussi valable pour* $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$.

(c) *Soit* $F(z) = f(z)e^{\omega z}$, *où* $\omega > 0$.

(i) *Montrer qu'il existe une constante* M *telle que*

$$|F(z)| \leq M, \tag{6.63}$$

pour tout $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ *et* $\theta = \pm\alpha$, *où* $\alpha = \arctan((k+\omega)/a)$.

(ii) *En appliquant le résultat de l'exercice 6.8.15 à chacun des trois angles* $(-\pi/2, -\alpha)$, $(-\alpha, \alpha)$ *et* $(\alpha, \pi/2)$, *montrer que* $|F(z)| \leq M$, *pour tout* $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(iii) *En déduire finalement que* $f \equiv 0$.

Exercice 6.8.17 (La condition de Blaschke pour le demi-plan droit) *Soit f une fonction holomorphe sur $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ et continue sur $\overline{\Pi_+}$ telle que $|f(z)| \leq M$, pour $z \in \overline{\Pi_+}$. Notons $z_1, z_2, \ldots$ les zéros de f dans le demi-plan Π_+.*

(a) *Montrer que*

$$|f(z)| \leq M \left| \frac{z_1 - z}{\bar{z}_1 + z} \frac{z_2 - z}{\bar{z}_2 + z} \cdots \frac{z_n - z}{\bar{z}_n + z} \right|,$$

pour $\Re(z) > 0$.

(b) *En déduire que si* $f \equiv 0$, *alors la série*

$$\sum_n \Re\left(\frac{1}{z_n}\right)$$

est convergente.

Exercice 6.8.18 (Calcul de l'ordre d'une série entière) *Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant :*

une série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est une fonction entière d'ordre fini ρ *si et seulement si*

$$\frac{1}{\rho} = \liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{\log(1/|a_n|)}{n \log n}\right).$$

Posons $\mu = \liminf_{n\to+\infty}\left(\frac{\log(1/|a_n|)}{n\log n}\right)$.

(a) *Supposons* $0 < \mu < +\infty$.

(i) *Montrer que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n| \leq n^{-n(\mu-\varepsilon)}.$$

(ii) *En déduire que* f *est une fonction entière.*

(iii) *Montrer qu'il existe une constante* $A > 0$ *telle que*

$$|f(z)| \leq Ar^{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} r^n n^{-n(\mu-\varepsilon)}, \qquad (r > 1).$$

Notons

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{n=n_0+1 \\ n \leq (2r)^{1/(\mu-\varepsilon)}}}^{+\infty} r^n n^{-n(\mu-\varepsilon)},$$

et

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{n=n_0+1 \\ n>(2r)^{1/(\mu-\varepsilon)}}}^{+\infty} r^n n^{-n(\mu-\varepsilon)}.$$

(iv) *Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ tel quelconque*

$$\Sigma_1 \leq K \exp((2r)^{1/(\mu-\varepsilon)} \log r).$$

(v) *Montrer que $\Sigma_2 \leq 1$.*

(vi) *En déduire que f est d'ordre fini $\rho \leq \frac{1}{\mu}$.*

(b) *Supposons $\mu = +\infty$. Montrer en utilisant un argument similaire, f est une fonction entière d'ordre fini $\rho = 0$.*

(c) *Soit maintenant $\varepsilon > 0$*

(i) *Montrer qu'il existe une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que*

$$|a_{n_k}| r^{n_k} \geq \left(r n_k^{-(\mu+\varepsilon)} \right)^{n_k}.$$

(ii) *Considérons $r_k = (2n_k)^{\mu+\varepsilon}$. Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que*

$$M(r_k) = \sup_{|z|=r_k} |f(z)| \geq \exp\left(A r_k^{1/(\mu+\varepsilon)} \right).$$

(iii) *En déduire que l'ordre de f vérifie*

$$\rho \geq \frac{1}{\mu}.$$

(d) *En déduire le résultat.*

Exercice 6.8.19 *Montrer que la fonctions*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n!)^\alpha}$$

est une fonction entière d'ordre $1/\alpha$.

Indication : *appliquer l'exercice 6.8.18.*

Exercice 6.8.20 (f et f' ont même ordre.) *Soit f une fonction entière. Notons*

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \quad et \quad M'(r) = \max_{|z|=r} |f'(z)|.$$

(a) *Montrer que*

$$M(r) \leq rM'(r) + |f(0)|.$$

(b) *En utilisant la formule de Cauchy, montrer que si $0 < r < R$, alors*

$$M'(r) \leq \frac{M(R)}{R-r}.$$

(c) *En déduire que f est d'ordre ρ si et seulement si f' est aussi d'ordre ρ. d'ordre ρ.*

Exercice 6.8.21 (Théorème de Laguerre) *Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant : soit f une fonction entière d'ordre fini $\alpha < 2$, réelle sur l'axe réel et tel que*

$$\mathcal{Z}(f) = \{z_1, z_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}.$$

Alors les zéros de f' sont aussi tous réels et séparés entre eux par les zéros de f.

(a) *Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ et une constante $a \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z} + a + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} \right), \qquad z \neq z_n.$$

(b) *En calculant $\Im\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)$, montrer que f' ne peut s'annuler que sur l'axe réel.*

(c) *Montrer que la fonction*

$$t \longmapsto \frac{f'(t)}{f(t)}$$

est strictement décroissante dans l'intervalle (z_n, z_{n+1}) et s'annule une seule fois dans cet intervalle.

(d) *Conclure.*

Question subsidiaire : *(re)démontrer ce résultat dans le cas où $f = P$ est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$!*

Exercice 6.8.22 (Inégalité de Young) *Soient $\mathbb{T}$ le cercle unité du plan complexe, $1 \leq p \leq +\infty$ et $L^p(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-mesurable et telle que $\|f\|_p < +\infty$, où*

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^p \, dt \right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < +\infty,$$

et

$$\|f\|_\infty = \inf_{M>0} \left\{ M : |\{e^{it} : |f(e^{it})| > M\}| = 0 \right\},$$

avec $|E|$ qui désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble E.

(a) *Soient $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq +\infty$ et $g \in L^1(\mathbb{T})$. Montrer que $f * g \in L^p(\mathbb{T})$.*

Indication : *on pourra utiliser le théorème de Riesz–Thorin.*

(b) *Soient $1 \leq r, s \leq +\infty$ tels que $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} \geq 1$. Soit p tel que*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} - 1.$$

En utilisant une nouvelle fois le théorème de Riesz–Thorin et la question précédente, montrer que si $f \in L^r(\mathbb{T})$ et $g \in L^s(\mathbb{T})$, alors $f * g \in L^p(\mathbb{T})$ et

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_r \|g\|_s.$$

Exercice 6.8.23 (Une réciproque du théorème de Hausdorff–Young) *Soit $\leq p \leq 2$ et q l'exposant conjugué de p. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\ell^p(\mathbb{Z})$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in L^q(\mathbb{T})$ telle que*

$$\hat{f}(n) = a_n, \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

et

$$\|f\|_q \leq \|\hat{f}\|_p.$$

Indication : *on pourra utiliser le théorème de Riesz–Thorin.*

Exercice 6.8.24 (Un théorème de Hausdorff–Young généralisé) *Soit $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille orthonormale dans $L^2(\mu)$ telle que*

$$|\varphi_n(x)| \leq M,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ *et tout* $x \in X$.

(a) *Montrer que* $\varphi_n \in L^q(\mu)$, *pour tout* $2 \leq q \leq +\infty$.

(b) *Pour chaque* $f \in L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq 2$, *définissons*

$$\hat{f}(n) = \int_X f\overline{\varphi_n}\, d\mu, \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

et $\hat{f} = (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$. *Montrer que* $\hat{f} \in \ell^q(\mathbb{Z})$ *avec*

$$\|\hat{f}\|_q \leq M^{(2-p)/p}\|f\|_p,$$

où q *est l'exposant conjugué de* p.

Annexe A

Quelques grands principes d'analyse fonctionnelle

A.0.1 Théorèmes de Hahn-Banach

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On désigne par E^* le dual (topologique) de E, i.e. l'espace des formes linéaires et continues sur E. Rappelons que E^* est muni de la norme duale :

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} |\varphi(x)|.$$

Le théorème de Hahn-Banach affirme que si G est un sous-espace vectoriel de E et si $g : G \longmapsto \mathbb{K}$ est linéaire et continue de norme

$$\|g\|_{G'} := \sup_{\substack{x\in G\\ \|x\|\leq 1}} |g(x)|,$$

alors, il existe $f \in E^*$ qui prolonge g et telle que

$$\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G'}.$$

Ce théorème admet deux corollaires importants.

Corollaire A.0.1 *Pour tout $x \in E$, il existe $\varphi_x \in E^*$ tel que $\|\varphi_x\| = 1$ et $\varphi_x(x) = \|x\|$.*

Le deuxième corollaire (qui se déduit aisément du premier) affirme que E^* sépare les points de E.

Corollaire A.0.2 *Soit $x, y \in E$ et supposons que pour tout $\varphi \in E^*$, on a $\varphi(x) = \varphi(y)$. Alors $x = y$.*

A.0.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Le théorème de Banach-Steinhaus affirme qu'une famille d'opérateurs linéaires et continues qui est ponctuellement bornée est en fait uniformément bornée. Plus précisément :

Théorème A.0.3 *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continues de E dans F. On suppose que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < +\infty, \qquad \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| < +\infty.$$

Autrement dit, il existe une constante c telle que

$$\|T_i x\| \leq c\|x\|, \qquad \forall x \in E, \forall i \in I.$$

Ce résultat admet une conséquence intéressante qui affirme qu'un ensemble d'un espace de Banach qui est faiblement borné est en fait borné (en norme).

Corollaire A.0.4 *Soit E un espace de Banach et soit M un sous-ensemble de E. Supposons que, pour tout $\varphi \in E^*$, $\varphi(M)$ est borné. Alors M est borné.*

Annexe B

Quelques compléments d'analyse complexe

L'objet de cet appendice est de développer la théorie classique de l'analyse complexe dans le contexte des fonctions à valeurs vectorielles.

Dans tout ce qui suit, $(E, \|\cdot\|)$ va désigner un espace de Banach, $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Rappelons que l'espace $\mathcal{B}(I, E)$, des fonctions bornées sur I à valeurs dans E, muni de la norme du sup

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in I} \|f(t)\|, \qquad (f \in B(I, E)),$$

est un espace de Banach.

B.1 Rappels d'analyse complexe

Dans ce premier paragraphe, nous rappelons deux résultats classiques (le théorème de Cauchy et les formules de Cauchy) pour des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour donner un énoncé suffisamment général, nous allons avoir besoin de la notion de système de courbes fermées orientées entourant un compact dans un ouvert du plan complexe. Cette notion est assez intuitive mais pour l'introduire proprement, cela nécessite un peu de travail ! Commençons par rappeler quelques notions élémentaires sur les courbes et fixons la terminologie utilisée dans ce cours.

Définition B.1.1 (a) *On appelle courbe (ou chemin) dans* $\mathbb{C}$ *toute application continue* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$*, où* $[a,b]$ *est un intervalle compact de* $\mathbb{R}$*. L'image d'une courbe* γ *sera notée* γ^**, c'est un compact de* $\mathbb{C}$*.*

(b) *On dit qu'une courbe* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *est fermée si* $\gamma(a) = \gamma(b)$*.*

(c) *On dit qu'une courbe* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *est de classe* C^k *par morceaux,* $k \geq 1$*, s'il existe une subdivision* $s = (s_0, s_1, \ldots, s_N)$ *de l'intervalle* $[a,b]$ *telle que la restriction de* γ *à chaque intervalle* $[s_i, s_{i+1}]$ *soit de classe* C^k*.*

(d) *Une courbe* γ *est dite simple si* $\gamma(s) = \gamma(t)$ *implique que soit* $s = t$ *soit* $s = a$ *et* $t = b$*.*

(e) *Etant donné une courbe* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$*, la courbe opposée, notée* $\overline{\gamma}$*, est définie sur le même intervalle par*

$$\overline{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t), \qquad t \in [a,b].$$

Enfin si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est une courbe de classe C^1 par morceaux et f est une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, contenant γ^*, on définit l'*intégrale curviligne* de f le long de γ comme :

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt, \tag{B.1}$$

Nous allons maintenant rappeler la notion d'indice.

Définition B.1.2 *Soit* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *une courbe fermée de classe* C^1 *par morceaux et soit* $z \notin \gamma^*$*. On appelle indice de* γ *par rapport à* z *le nombre défini par*

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt.$$

Donnons quelques propriétés clés de l'indice. Pour une démonstration de ce résultat, on pourra se reporter à [7].

Proposition B.1.3 *Soit* γ *une courbe fermée de classe* C^1 *par morceaux. Alors*

(a) $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$*, pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$*.*

(b) *$z \longmapsto n(\gamma, z)$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

(c) *$n(\gamma, z)$ s'annule sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

Finalement on a le résultat suivant très intuitif mais dont la démonstration n'est pas si facile...(voir par exemple [5]).

Théorème B.1.4 (Théorème de Jordan) *Soit γ une courbe fermée, simple, de classe C^1 par morceaux. Alors $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ a exactement deux composantes connexes. De plus, la frontière de chacune d'elles est égale à γ^*.*

Il suit de la proposition B.1.3 et du théorème de Jordan que si γ est une courbe fermée, simple, de classe C^1 par morceaux, alors $n(\gamma, z)$ prend seulement deux valeurs : sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, $n(\gamma, z) \equiv 0$; sur la composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, $n(\gamma, z)$ est soit identiquement égale à 1, soit identiquement égale à -1.

Nous allons maintenant définir l'orientation d'une courbe ou d'un système de courbes.

Définition B.1.5 *Soit $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ un système de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux. On note*

$$\gamma^* = \bigcup_{j=1}^{m} \gamma_j^*$$

et pour $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, on pose

$$n(\gamma, z) = \sum_{j=1} n(\gamma_j, z).$$

On dit que γ est positivement orientée si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) *$\gamma_i^* \cap \gamma_j^* = \emptyset$, $i \neq j$.*

(b) *chaque courbe fermée γ_j est simple.*

(c) *$n(\gamma, z) = 0$ ou 1, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

L'intérieur de γ, noté Ext(γ), est défini par

$$Int(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : n(\gamma, z) = 1\}.$$

L'extérieur de γ, noté Ext(γ), est défini par

$$Ext(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : n(\gamma, z) = 0\}.$$

Si f est continue sur un voisinage de γ^*, on posera

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z)\, dz.$$

Etant donné un compact K dans un ouvert Ω du plan complexe, le résultat suivant affirme l'existence l'existence d'un système de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux et positivement orienté, qui "entoure" K dans Ω. Ce résultat assez intuitif possède une preuve dont l'idée est simple mais dont les détails techniques sont un peu fastidieux. On pourra se reporter à [3] ou [7].

Proposition B.1.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un compact contenu dans Ω. Alors il existe un système de courbes fermées dans $\Omega \setminus K$, $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, de classe C^1 par morceaux, positivement orienté, tel que*

$$K \subset Int(\gamma) \quad et \quad \mathbb{C} \setminus \Omega \subset Ext(\gamma).$$

Définition B.1.7 *On dit qu'un système de courbes fermées de classe C^1 par morceaux $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ entoure le compact K dans Ω si les conditions suivantes sont réalisées :*

(a) $\gamma^* \subset \Omega \setminus K$.

(b) *γ est positivement orienté.*

(c) *$K \subset Int(\gamma)$ et $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset Ext(\gamma)$.*

Exemple B.1.8 *Considérons l'ouvert $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : 1/8 < |z| < 2\}$ et le compact $K := \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq |z| \leq 1\}$. Notons $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les trois courbes fermées* *définies, pour $t \in [0,1]$, par*

$$\gamma_1(t) = \frac{3}{2}e^{2i\pi t}, \quad \gamma_2(t) = \frac{1}{4}e^{-2i\pi t}, \quad \gamma_3(t) = \frac{1}{4}e^{2i\pi t}.$$

Alors on vérifie facilement que les deux systèmes $\{\gamma_1\}$ et $\{\gamma_1, \gamma_3\}$ n'entourent pas le compact K dans Ω. Par contre, le système $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ entoure le compact K dans Ω.

Nous pouvons maintenant énoncer les deux résultats principaux que nous allons chercher par la suite à généraliser dans le cadre vectoriel. Pour une preuve de ces résultats classiques, on pourra se reporter à [4, 3, 7, 10].

Proposition B.1.9 (Théorème de Cauchy scalaire) *Soient Ω un ouvert du plan complexe, γ_1 et γ_2 deux systèmes de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux, et contenues dans l'ouvert Ω. Si, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $Ind_{\gamma_1}(z) = Ind_{\gamma_2}(z)$, alors pour toute fonction f holomorphe sur Ω, on a*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

Proposition B.1.10 (Formule de Cauchy scalaire) *Soient K un compact contenu dans un ouvert Ω du plan complexe. Si le système de courbes fermées γ entoure le compact K dans Ω, alors pour toute fonction f holomorphe sur Ω, on a*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z)^{n+1}}\, d\lambda, \qquad z \in K, n \in \mathbb{N}.$$

B.2 Intégration des fonctions réglées à valeurs vectorielles

Nous allons dans ce paragraphe développer la notion d'intégrale de Riemann pour des fonctions (réglées) à valeurs vectorielles. Cela sera ensuite utilisé pour intégrer des fonctions complexes à valeurs vectorielles et ainsi donner un sens aux propositions B.1.9 et B.1.10 dans le cadre vectoriel.

Définition B.2.1 *Une fonction $f : I = [a, b] \longrightarrow E$ est appelée fonction en escalier s'il existe une partition*

$$P : a = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b$$

telle que f est constante sur chacun des intervalles $]t_{j-1}, t_j[$. L'ensemble $\mathcal{E}(I, E)$ de toutes les fonctions en escalier forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(I, E)$.

Pour chaque fonction f en escalier (définie à partir de la partition P ci-dessus), on appelle intégrale de f l'élément de E défini par

$$\int_a^b f(t)\,dt := \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) f(\zeta_j), \tag{B.2}$$

avec $\zeta_j \in]t_{j_1}, t_j[$.

Il est facile de montrer que la valeur du membre de droite de (B.2) ne dépend pas de la partition P choisie et donc l'intégrale est bien définie.

Lemme B.2.2 *L'application $\mathfrak{I} : \mathcal{E}(I, E) \longrightarrow E$, définie par*

$$\mathfrak{I}f := \int_a^b f(t)\,dt, \qquad (f \in \mathcal{E}(I, E)),$$

est une application linéaire continue de $(\mathcal{E}(I, E), \|\cdot\|_\infty)$ dans E. De plus, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}(I, E)$, on a

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt \leq (b - a)\|f\|_\infty.$$

Preuve : tout découle facilement de la définition et des calculs suivants (qui utilisent l'inégalité triangulaire) :

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) f(\zeta_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) \|f(\zeta_j)\| \\ &= \int_a^b \|f(t)\|\,dt \leq \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) \|f\|_\infty = (b - a)\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Définition B.2.3 *L'ensemble des fonctions réglées $\mathcal{R}(I,E)$ est définie comme l'adhérence de $\mathcal{E}(I,E)$ dans l'espace de Banach $(\mathcal{B}(I,E), \|\cdot\|_\infty)$. Autrement dit, une fonction bornée $f : I \longrightarrow E$ est dite réglée si et seulement si il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur I.*

Théorème B.2.4 *L'application $\mathfrak{I}$ se prolonge (de façon unique) en une application linéaire continue de $\mathcal{R}(I,E)$ dans E. On désignera encore par $\mathfrak{I}$ cette extension et pour $f \in \mathcal{R}(I,E)$, on écrira aussi*

$$\mathfrak{I}(f) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{R}(I,E)$ et toute forme linéaire continue φ sur E, on a

(a) $\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt \leq (b-a)\|f\|_\infty$.

(b) $\varphi\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \varphi(f(t))\,dt$.

Preuve : L'unicité du prolongement découle de la densité de $\mathcal{E}(I,E)$ dans $\mathcal{R}(I,E)$. Maintenant, soit $f \in \mathcal{R}(I,E)$; alors il existe une suite $f_n \in \mathcal{E}(I,E)$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, $n \to +\infty$. Or

$$\|\mathfrak{I}(f_n) - \mathfrak{I}(f_p)\| = \|\mathfrak{I}(f_n - f_p)\| \leq (b-a)\|f_n - f_p\|_\infty.$$

On en déduit que $(\mathfrak{I}f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E complet, donc elle converge. Notons

$$\mathfrak{I}f := \lim_{n\to+\infty} \mathfrak{I}f_n.$$

Il est clair que $\mathfrak{I}$ définit une application linéaire continue sur $\mathcal{R}(I,E)$. Le point (a) vient immédiatement du lemme B.2.2.

Pour le point (b), remarquons que si $f \in \mathcal{E}(I,E)$, alors on a

$$\varphi\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})f(\zeta_j)\right) = \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})\varphi(f(\zeta_j)) = \int_a^b \varphi(f(t))\,dt.$$

Le résultat découle alors d'un passage à la limite en utilisant la continuité de φ.

□

Théorème B.2.5 *Toute fonction continue $f : I \longrightarrow E$ est réglée.*

Preuve : Comme f est continue sur le compact $I = [a, b]$, il suit du théorème de Heine que f est uniformément continue. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [a, b]$ satisfaisant $|x - y| \leq \delta$, on a $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$. Soit $P : a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ une partition tel que $\max_{1\leq j\leq n}(t_j - t_{j-1}) \leq \delta$. Définissons

$$g(a) = f(a) \quad \text{et} \quad g(t) = f(t_j), \quad t_{j-1} < t \leq t_j.$$

Alors $g \in \mathcal{E}(I, E)$ et pour tout $t \in [a, b]$, on a $\|g(t) - f(t)\| \leq \varepsilon$, i.e. $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$. On en déduit donc que $f \in \mathcal{R}(I, E)$.

□

Remarque B.2.6 *Les fonctions réglées peuvent se caractériser comme les fonctions qui admettent une limite à droite et une limite à gauche en tout point de $[a, b]$ (voir [1]). Donc en particulier, les fonctions continues par morceaux sont aussi réglées.*

Définition B.2.7 *Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe de classe C^1 par morceaux et soit f une fonction continue sur un voisinage de γ^* à valeurs dans E. Alors on définit l'intégrale curviligne de f le long de γ comme*

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt. \tag{B.3}$$

En remarquant que la formule dite “de changement de variable” s'applique aussi aux intégrales vectorielles (exercice !), il est facile de voir que le membre de droite de (B.3) ne dépend que de f et de γ et non de la paramétrisation choisie.

On déduit immédiatement du théorème B.2.4 le résultat suivant.

Théorème B.2.8 *Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe de classe C^1 par morceaux et soit f une fonction continue sur un voisinage de γ^* à valeurs dans E. Alors,*

(a) $\left\|\int_\gamma f(z)\, dz\right\| \leq \int_\gamma \|f(z)\|\, |dz| = \int_a^b \|f(z(t))\| |z'(t)|\, dt.$

(b) *Pour toute forme linéaire* φ *continue sur* E*, on a* $\varphi\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right) = \int_\gamma \varphi(f(z))\,dz.$

Nous terminons par une proposition utile dans le cadre des algèbres de Banach.

Proposition B.2.9 *Soit* $\mathcal{A}$ *une algèbre de Banach,* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *une courbe de classe* C^1 *par morceaux et soit* f *une fonction continue sur un voisinage de* γ^* *à valeurs dans* $\mathcal{A}$*. Alors, pour tout* $x \in \mathcal{A}$*, on a*

$$x\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right) = \int_\gamma x f(z)\,dz, \tag{B.4}$$

et

$$\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right) x = \int_\gamma f(z) x\,dz. \tag{B.5}$$

Preuve : Pour démontrer (B.4), soit M_x l'opérateur de multiplication à gauche par x et soit Λ une forme linéaire continue sur $\mathcal{A}$. Alors ΛM_x est une forme linéaire continue sur $\mathcal{A}$ et on peut appliquer le théorème B.2.8 (b) qui donne

$$\Lambda\left(x\int_\gamma f(z)\,dz\right) = \Lambda M_x\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right) = \int_\gamma \Lambda M_x(f(z))\,dz = \int_\gamma \Lambda(xf(z))\,dz.$$

En réappliquant le théorème B.2.8 (b) au membre à droite de cette dernière égalité, on obtient que

$$\Lambda\left(x\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right)\right) = \Lambda\left(\int_\gamma xf(z)\,dz\right).$$

Le théorème de Hahn-Banach (voir corollaire A.0.2) permet alors d'en déduire (B.4). Pour démontrer (B.5), il suffit d'utiliser le même raisonnement avec l'opérateur de multiplication à droite.

$\square$

B.3 Fonctions holomorphes à valeurs vectorielles

Dans ce paragraphe, nous allons développer la théorie des fonctions holomorphes à valeurs vectorielles. Nous allons en fait donner un peu plus de détails et de résultats que ce qui est réellement utilisé dans ce cours. Notamment, dans une première lecture, on pourra porter son attention uniquement sur les théorèmes B.3.5, B.3.7 et B.3.9.

Comme nous allons le voir, beaucoup de résultats de la théorie des fonctions holomorphes à valeurs scalaires s'étend (sans aucun changement ou presque) au cas vectoriel. L'idée étant la plupart du temps de scalariser le problème (en appliquant une forme linéaire continue), d'utiliser les résultats du cas scalaire et de revenir au cas vectoriel avec le corollaire du théorème de Hahn-Banach (corollaire A.0.2). Même si cette idée est assez simple, nous allons prendre le temps de donner les détails....

Définition B.3.1 *Soit Ω un ouvert du plan complexe, E un espace de Banach et $f : \Omega \longrightarrow E$. On dit que f est holomorphe sur Ω si elle est dérivable en tout point $z_0 \in \Omega$, i.e. si la limite suivante*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

existe et est finie.

On dit que f est faiblement holomorphe sur Ω si pour tout élément φ du dual de E, la fonction (à valeurs complexes) $\varphi \circ f$ est holomorphe sur Ω.

Nous notons $\mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, E)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω à valeurs dans E. Dans le cas où $E = \mathbb{C}$, on note plus simplement $\mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega) = \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, \mathbb{C})$.

Il est évident que toute fonction holomorphe est faiblement holomorphe. En fait, nous allons montrer que la réciproque est aussi vraie. Commençons par un lemme.

Lemme B.3.2 *Soit $f : \Omega \longrightarrow E$ une fonction faiblement holomorphe. Alors f est continue sur Ω.*

Preuve : Soit $a \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$.

Considérons le sous-ensemble de E défini par

$$M = \left\{ \frac{f(z) - f(a)}{z - a} : 0 < |z - a| \leq r \right\}.$$

Montrons que M est faiblement borné. Pour cela considérons $u \in E^*$. Alors, puisque la fonction $u \circ f$ est holomorphe sur Ω, la fonction g, définie par

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{u(f(z)) - u(f(a))}{z - a}, & \text{si } 0 < |z - a| \leq r \\ (u \circ f)'(a), & \text{si } z = a \end{cases}$$

est une fonction continue du compact $\overline{B}(a, r)$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Donc l'image $g(\overline{B}(a, r))$ est un compact de $\mathbb{C}$. Clairement $u(M) \subset g(\overline{B}(a, r))$ et donc $u(M)$ est bornée. Comme cela est vrai pour tout $u \in E^*$, cela signifie que M est faiblement borné. D'après le corollaire A.0.4, cela implique que M est borné. Autrement dit, il existe une constante $K = K(a, r, f) > 0$ telle que pour tout z, $0 < |z - a| \leq r$, on ait

$$\left\| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right\| \leq K,$$

d'où

$$\|f(z) - f(a)\| \leq K|z - a|.$$

Cette dernière inégalité entraine en particulier que f est continue en a.

$\square$

Pour montrer qu'une fonction faiblement holomorphe est holomorphe, nous allons montrer qu'elle vérifie la formule de Cauchy.

Théorème B.3.3 *Soit $f : \Omega \longrightarrow E$ une fonction faiblement holomorphe et $a \in \Omega$. Alors*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} \, dz,$$

où γ est un système de courbes fermées dans Ω, de classe C^1 par morceaux et qui entoure $\{a\}$.

Preuve : Pour chaque $u \in E^*$, la fonction $u \circ f$ est holomorphe sur Ω. La formule de Cauchy scalaire (proposition B.1.10) donne alors

$$u(f(a)) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{u(f(z))}{z-a}\, dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma u\left(\frac{f(z)}{z-a}\right)\, dz.$$

On applique alors le théorème B.2.8 qui entraine que

$$u(f(a)) = u\left(\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz\right).$$

Cette dernière égalité etant vraie pour tout $u \in E^*$, le corollaire du théorème de Hahn-Banach (corollaire A.0.2) permet alors de conclure que

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

□

Théorème B.3.4 *Toute fonction faiblement holomorphe $f : \Omega \longrightarrow E$ est holomorphe. De plus, pour chaque $a \in \Omega$, on a*

$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz,$$

où γ_r est n'importe quel cercle positivement orienté $\gamma_r : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = a + re^{2i\pi t}$, satisfaisant $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$.

Preuve : D'après le lemme B.3.2, la fonction f est continue sur Ω donc en particulier sur le compact γ_r^*. D'où :

$$K := \sup_{|z-a|=r} \|f(z)\| < +\infty.$$

Considérons maintenant $0 < \delta < r/2$ et choisissons $b \in \Omega$ tel que $0 < |b-a| < \delta$. Alors il est clair que γ_r est une courbe fermée dans Ω, de classe C^1 et qui entoure à la fois $\{a\}$ et $\{b\}$. Le théorème B.3.3 permet alors d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= \frac{1}{b-a}\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \left[\frac{f(z)}{z-b} - \frac{f(z)}{z-a}\right] dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz.\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz\right\| &=\frac{1}{2\pi}\left\|(b-a)\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-a)^2(z-b)}\,dz\right\|\\ &\leq\frac{|b-a|}{2\pi}\int_{\gamma_r}\frac{\|f(z)\|}{|z-a|^2|z-b|}\,|dz|.\end{aligned}$$

Pour $z\in\gamma_r^*$, remarquons que $|z-a|=r$, $\|f(z)\|\leq K$ et par l'inégalité triangulaire, on a aussi

$$|z-b|\geq|z-a|-|a-b|\geq r-\delta\geq\frac{r}{2}.$$

Ainsi on obtient

$$\left\|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz\right\|\leq\frac{2K\delta}{r^2}. \tag{B.6}$$

Cette inégalité implique que la limite

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

existe et est finie. Ceci signifie donc que f est dérivable en tout point a de Ω et donc f est homomorphe sur Ω. De plus, d'après (B.6), on a

$$f'(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz.$$

□

Théorème B.3.5 (Théorème de Cauchy) *Soient Ω un ouvert du plan complexe, γ_1 et γ_2 deux systèmes de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux, et contenues dans l'ouvert Ω. Si, pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\Omega$, $Ind_{\gamma_1}(z)=Ind_{\gamma_2}(z)$, alors pour toute fonction $f\in\mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega,E)$, on a*

$$\int_{\gamma_1}f(z)\,dz=\int_{\gamma_2}f(z)\,dz.$$

Preuve : Pour chaque $u\in E^*$, la fonction $u\circ f$ est holomorphe sur Ω. Le théorème de Cauchy scalaire (proposition B.1.9) donne alors

$$\int_{\gamma_1}u(f(z))\,dz=\int_{\gamma_2}u(f(z))\,dz.$$

On applique alors le théorème B.2.8 qui entraine que

$$u\left(\int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right) = \int_{\gamma_1} u(f(z))\,dz = \int_{\gamma_2} u(f(z))\,dz = u\left(\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right).$$

Comme l'égalité est vraie pour tout élément $u \in E^*$, le corollaire du théorème de Hahn-Banach (corollaire A.0.2) permet alors de conclure que

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

□

Théorème B.3.6 (Formule de Cauchy) *Soit Ω un ouvert du plan complexe. Toute fonction $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, E)$ est indéfiniment dérivable (au sens complexe) sur Ω. De plus, pour tout point $a \in \Omega$ et chaque entier $n \geq 0$, on a*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz, \tag{B.7}$$

où γ est un système de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux et qui entoure le compact $\{a\}$ dans Ω.

Preuve : Pour montrer que f est indéfiniment dérivable, nous allons raisonner par récurrence. Tout d'abord, d'après le lemme B.3.2, nous savons déjà que f est continue sur Ω. Supposons maintenant que f est n-fois dérivable sur Ω. Pour tout élément $u \in E^*$, la fonction (complexe) $u \circ f$ est holomorphe sur Ω donc $(n+1)$-fois dérivable sur Ω. Mais comme u est linéaire, on a $(u \circ f)^{(n)} = u \circ f^{(n)}$. Ceci implique que la fonction $u \circ f^{(n)} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable. Autrement dit, la fonction $f^{(n)}$ est faiblement holomorphe sur Ω, donc holomorphe sur Ω (i.e. dérivable sur Ω), d'après le théorème B.3.4. Ainsi f est $(n+1)$-fois dérivable sur Ω. Par récurrence, on en déduit que f est indéfiniment dérivable sur Ω.

Pour montrer la formule (B.7), considérons $u \in E^*$. Comme la fonction $u \circ f$ est holomorphe sur Ω on peut appliquer les formules de Cauchy scalaire (proposition B.1.9) qui donnent alors

$$(u \circ f)^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{u(f(z))}{(z-a)^{n+1}}\,dz,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où γ est un système de courbes fermées, de classe C^1 par morceaux et qui entoure le compact $\{a\}$ dans Ω. On applique alors le théorème B.2.8 qui entraine que

$$(u \circ f)^{(n)}(a) = u\left(\frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\right).$$

Par linéarité de u, on a $(u \circ f)^{(n)}(a) = u(f^{(n)})(a)$ et donc

$$u(f^{(n)})(a) = u\left(\frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\right).$$

Comme l'égalité est vraie pour tout élément $u \in E^*$, le corollaire du théorème de Hahn-Banach (corollaire A.0.2) permet alors de conclure que

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

□

Théorème B.3.7 (Développement en série entière) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$. *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, E)$ *et tout point* $z_0 \in \Omega$, *la série entière :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

converge uniformément et normalement sur tout compact contenu dans le disque ouvert $D(z_0, \mathrm{dist}(z_0, \Omega^c))$ *et sa somme est égale à* $f(z)$ *en tout point de ce disque. Cette série (appelée la série de Taylor de* f *en* z_0*) est l'unique série entière de la forme* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $a_n \in E$, *dont la somme est* f *dans le disque mentionné. Le rayon de convergence est au moins* $\mathrm{dist}(z_0, \Omega^c)$.

Remarque B.3.8 *On a noté* $\mathrm{dist}(z_0, \Omega^c)$ *la distance de* z_0 *à* Ω^c *si* $\Omega^c \neq \emptyset$ *et* $+\infty$ *sinon.*

Preuve : Soient $0 < r < \mathrm{dist}(z_0, \Omega^c)$, $z, \zeta \in \mathbb{C}$ tels que $|z - z_0| = r$ et $|\zeta - z_0| < r$. Nous avons alors

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)\left(1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}},$$

cette série étant normalement convergente sur tout compact de la forme $K \times \partial B(z_0, r)$ avec K compact contenu dans $B(z_0, r)$. Nous pouvons alors appliquer la formule de Cauchy (théorème B.3.6) et intervertir l'ordre de l'intégration et de la sommation, ce qui donne

$$\begin{aligned} f(\zeta) =& \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \right) (\zeta - z_0)^n \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (\zeta - z_0)^n. \end{aligned}$$

Les autres propriétés découlent immédiatement des propriétés classiques sur les séries entières.

□

Pour plus de détails sur les séries entières à valeurs vectorielles, on pourra consulter [9] mais la théorie est la même que pour les séries entières à valeurs scalaires.

Théorème B.3.9 (Liouville) *Toute fonction f holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$, à valeurs dans E, est constante.*

Preuve : On peut déduire ce résultat du théorème de Liouville pour les fonctions à valeurs scalaires. On peut aussi donner une preuve directe. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Comme f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, les formules de Cauchy peuvent s'appliquer sur tout cercle γ_r de centre z_0 et de rayon $r > 0$ parcouru une fois dans le sens positif. D'où

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Notons $M := \|f\|_\infty$. Le théorème B.2.8 implique alors que

$$\|f^{(n)}(z_0)\| \leq \frac{n! \|f\|_\infty}{r^n},$$

et donc, en faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient que $f^{(n)}(z_0) = 0$, pour tout $n \geq 1$. Le théorème B.3.7 permet alors de conclure que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = f(z_0)$.

$\square$

Proposition B.3.10 *Soit* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < r\}$, $r > 0$ *et* $f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, E)$. *Si* f *est bornée sur* Ω, *alors* f *se prolonge en une unique fonction* $\widetilde{f}$ *holomorphe dans* $D(a,r)$.

Preuve : Considérons $g : D(a,r) \longrightarrow E$ la fonction défnie par

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)f(z) & \text{si } 0 < |z-a| < r \\ 0 & \text{si } z = a. \end{cases}$$

Il est clair que g est holomorphe sur Ω et continue sur $B(a,r)$. Maintenant si $u \in E^*$, alors la fonction scalaire $u \circ g$ a les mêmes propriétés, elle est holomorphe sur Ω et continue sur $D(a,r)$. Il est alors bien connu (c'est une conséquence très simple du théorème de Morera, voir [4] par exemple) que $u \circ g$ est holomorphe sur $D(a,r)$. Ainsi g est faiblement holomorphe sur $D(a,r)$ donc holomorphe. On peut alors appliquer le théorème B.3.7 qui dit que pour $z \in D(a,r)$, on a

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

où la série converge normalement sur tout compact de $D(a,r)$. Comme $g(a) = 0$, on peut alors écrire $g(z) = (z-a)\widetilde{f}(z)$, avec

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^n.$$

La théorie des séries entières nous dit alors que $\widetilde{f}$ est holomorphe dans $D(a,r)$ et de plus, on a bien $f(z) = \widetilde{f}(z)$, pour $z \in \Omega$. L'unicité est immédiate (par continuité).

$\square$

Théorème B.3.11 (Principe de prolongement analytique) *Soient* Ω *un ouvert connexe du plan complexe,* E *un sous-ensemble de* Ω *possédant un point d'accumulation dans* Ω*. Si* $f, g \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\Omega, E)$ *et si* $f(z) = g(z)$ *pour* $z \in E$*, alors* $f \equiv g$*.*

Preuve : On déduit ce résultat de l'analogue scalaire. Soit $u \in E^*$. Alors $u \circ f$ et $u \circ g$ sont deux fonctions holomorphes sur Ω, à valeurs scalaires, qui coincident sur un sous-ensemble E. Comme E possède un point d'accumulation dans Ω, alors $u \circ f \equiv u \circ g$. Le corolllaire du théorème de Hahn-Banach (corollaire A.0.2) permet alors de conclure que $f \equiv g$.

$\square$

Bibliographie

[1] J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiès. *Cours de Mathématiques, tome 2 : analyse.* Dunod Université, 1972.

[2] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.* Dunod, 1983.

[3] John B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1978.

[4] Carlos Berenstein et Roger Gay. *Complex variables*, volume 125 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1991. An introduction.

[5] Eric Amar et Etienne Matheron. *Analyse complexe.* Cassini, 2004.

[6] J.-F. Pabion. *Eléments d'analyse complexe.* Ellipses, 1995.

[7] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, Paris, 1980. Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman, Third printing.

[8] Walter Rudin. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.

[9] Laurent Schwartz. *Analyse. I.* Collection Enseignement des Sciences, Vol. 42. Hermann, Paris, 1991. Théorie des ensembles et topologie., avec la collaboration de K. Zizi.

[10] Alain Yger. *Analyse complexe et distributions.* Collection Mathématiques $2^{\text{ième}}$. Ellipses, 2001.