Chapitre 1

Fonctions harmoniques

On désignera par $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ et par $\mathbb{T}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$. L'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ est noté $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$.

1.1 Rappels : théorème de Poincaré et théorème de Fejér

1.1.1 Le théorème de Poincaré

Soit $w = fdx + gdy$ une 1-forme différentielle de classe C^1 (i.e. f et g sont de classe C^1) sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Rappelons que dw est la 2-forme différentielle définie par $dw = df \wedge dx + dg \wedge dy$ et rappelons que si f est de classe C^1, df est appelée la 1-forme différentielle associée à f et est définie par $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.
On dit que w est **fermée** si $dw = 0$ et on dit que w est **exacte** s'il existe une fonction φ de classe C^2 sur Ω telle que $w = d\varphi$ (i.e. w est la 1-forme différentielle associée à φ).

Lemme 1.1.1 *Toute forme exacte sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est fermée.*

Preuve : Si $w = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$, alors

$$dw = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dy\right) \wedge dy.$$

Rappelons que le produit extérieur $\wedge$ est **anticommutatif**, ce qui implique $dx \wedge dy = -dy \wedge dx, dx \wedge dx = 0 = dy \wedge dy$. D'autre part, comme φ est de classe C^2, nous avons

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$. On obtient donc :

$$dw = \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right) dx \wedge dy = 0.$$

$\square$

Il existe une réciproque du Lemme 1.1.1 que nous admettrons (la preuve utilise la formule de Stokes, [7], Chap. 1, Section 2.8).

Théorème 1.1.1 (de Poincaré) *Soit Ω un ouvert* ***simplement connexe****. Alors toute 1-forme différentielle fermée sur Ω est exacte.*

Remarque 1.1.1 *Tout convexe est simplement connexe.*

1.1.2 Le théorème de Fejér

Pour f continue sur $\mathbb{T}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit le n-ième **coefficient de Fourier** de f par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt.$$

La **série de Fourier** de f est la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}$. La **somme partielle** de la série de Fourier de f est $S_m(f)(e^{it}) = \sum_{|n|\leq m} \hat{f}(n)e^{int}$. Le théorème suivant, que nous admettrons, dit que les sommes partielles ne convergent pas en général mais, si f est continue, on peut les “régulariser” et les rendre convergentes en prenant leurs moyennes.

Théorème 1.1.2 (de Fejér) *Si f est continue sur $\mathbb{T}$, alors la* ***moyenne de Cesàro*** *$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} S_m(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{T}$.*

Corollaire 1.1.1 *Les polynômes trigonométriques sont denses dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{T}$, $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, pour la convergence uniforme sur $\mathbb{T}$.*

Preuve : Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, la somme partielle $S_m(f)$ est un polynôme trigonométrique (un polynôme trigonométrique est une fonction de la forme $e^{it} \longmapsto \sum_{n=-p}^{p} c_n e^{int}$ avec $c_n \in \mathbb{C}$).

$\square$

1.2 Définition et premières propriétés des fonctions harmoniques

Définition 1.2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est **harmonique** sur Ω si f est de classe C^2 sur Ω et si $\Delta f \equiv 0$ sur Ω, où Δf est le **Laplacien** de f défini par $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.*

Remarque 1.2.1 *Pour toute fonction f de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, on a :*

$$\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z},$$

avec $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) - i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\Delta f,
\end{aligned}$$

car $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ puisque f est par hypothèse de classe C^2. Via un calcul analogue, on montre que $\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z} = \frac{1}{4}\Delta f$.

Proposition 1.2.1 *Toute fonction holomorphe ou anti-holomorphe sur un ouvert Ω est harmonique sur Ω*

Preuve : Si $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, f est de classe C^2 et de plus $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \equiv 0$ sur Ω. Par conséquent, $\Delta f = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right) \equiv 0$. Si f est anti-holomorphe, f est de la forme $\overline{g}$ où g est holomorphe. Ainsi f est elle-aussi de classe C^2 et $\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$ sur Ω. Par conséquent, $\Delta f = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \equiv 0$.

□

Remarque 1.2.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est harmonique si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont harmoniques sur Ω.*

La remarque ci-dessus est une conséquence immédiate du fait que $Re(\Delta f) = \Delta(Re(f))$ et $Im(\Delta f) = \Delta(Im(f))$.

Corollaire 1.2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe, alors $Re(f)$ et $Im(f)$ sont harmoniques sur Ω.*

Le corollaire ci-dessus admet une réciproque à condition d'imposer une condition supplémentaire sur l'ouvert Ω.

Théorème 1.2.1 *Soit Ω un ouvert **simplement connexe** de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Si f est une fonction harmonique sur Ω alors il existe une fonction φ holomorphe sur Ω telle que $Re(\varphi) = f$.*

Preuve : On cherche une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$, de classe C^2 telle que $f + ig$ soit holomorphe sur Ω. D'après les **équations de Cauchy-Riemann**, $f + ig$ est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$ sur Ω.

Considérons la 1-forme différentielle w de classe C^1 définie par $w = -\frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy$. Alors w est une forme fermée. En effet,

$$\begin{aligned} dw &= \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) dx \wedge dy \\ &= \Delta f dx \wedge dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'ouvert Ω étant simplement connexe, d'après le théorème de Poincaré, il existe une fonction g de classe C^2 sur Ω telle que

$$-\frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy = w = dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy.$$

On a donc $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$. La fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi = f + ig$ est donc holomorphe sur Ω et par construction $f = Re(\varphi)$.

□

Remarque 1.2.3 *L'hypothèse "Ω simplement connexe" est nécessaire.*

En effet, posons $f(z) = \log|z|$ pour $z \neq 0$. Si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, il existe une détermination holomorphe φ du logarithme sur $D(a, |a|)$, le disque ouvert centré en a et de rayon $|a|$ (en fait, plus généralement, il existe une détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite d'extrémité l'origine). On a donc $e^{\varphi(z)} = z$ pour $|z - a| < |a|$, ce qui implique $|z| = e^{Re(\varphi(z))}$ et $\log|z| = Re(\varphi(z))$. Ainsi $\log|z|$ est une fonction harmonique sur $D(a, |a|)$ pour tout $a \neq 0$ et donc $\log|z|$ est une fonction harmonique à valeurs réelles sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. S'il existait une fonction φ_1 holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $Re(\varphi_1(z)) = \log|z|$, on obtiendrait une détermination holomorphe Ψ du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ce qui est absurde. En effet, rappelons qu'une fonction Ψ holomorphe sur un ouvert non vide Ω est une détermination holomorphe du logarithme sur Ω si $e^{\Psi(z)} = z$ sur Ω. D'après les équations de Cauchy-Riemann, on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} e^{\Psi(z)} = z,\ z \in \Omega \\ \Psi \text{ holomorphe sur } \Omega \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Re(\Psi(z)) = \log|z| \text{ sur } \Omega \\ \Psi \text{ holomorphe sur } \Omega \\ \exists z_0 \in \Omega \text{ tel que } e^{\Psi(z_0)} = z_0. \end{array}\right.$$

S'il existait une fonction φ_1 holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $Re(\varphi_1(z)) = \log|z|$, on obtiendrait une détermination holomorphe φ_1 du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en posant $\Psi(z) = \varphi_1(z) - \varphi_1(1)$. Ceci est absurde car toute détermination holomorphe du logarithme sur Ω est une primitive de $1/z$, ce qui implique $\int_\gamma 1/z dz = 0$ pour tout lacet tracé dans Ω. Or l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ne vérifie pas cette dernière condition.

On obtient ainsi la caractérisation suivante des fonctions harmoniques à valeurs réelles.

Corollaire 1.2.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est harmonique sur Ω.*
2. *Pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ et φ holomorphe sur $D(z_0, r)$ tels que $f = Re(\varphi)$ sur $D(z_0, r)$.*
3. *Pour tout ouvert simplement connexe $\mathcal{U}$ de Ω, il existe ψ holomorphe sur $\mathcal{U}$ tel que $f = Re(\psi)$ sur $\mathcal{U}$.*

Les fonctions harmoniques sur un disque ouvert $D(a, r)$ ($a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$), continues sur le disque fermé $\overline{D(a, r)}$ et à valeurs complexes ont la propriété suivante.

Corollaire 1.2.3 *Soit f une fonction continue sur $\overline{D(a, r)}$ ($a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$), harmonique* *sur $D(a,r)$ et à valeurs complexes. Alors on a* ***la formule de la moyenne*** *:*

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt \\ &= \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\overline{D(a,r)}} f(x+iy)dxdy. \end{aligned}$$

Preuve : Supposons que f soit harmonique sur $D(a,\rho)$ avec $\rho > r$. Soit $f_1 = Re(f)$. Alors f_1 est harmonique sur $D(a,\rho)$. Comme $D(a,\rho)$ est simplement connexe, d'après le Théorème 1.2.1, il existe φ holomorphe sur $D(a,\rho)$ telle que $f_1 = Re(\varphi)$ sur $D(a,\rho)$. D'après la **formule de Cauchy**, nous avons :

$$\varphi(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(a,r)} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - a}d\xi,$$

avec $0 < r < \rho$ et où $\Gamma(a,r)$ est le cercle centré en a et de rayon r. Posons $\xi = a + re^{it}$ pour $0 \leq t \leq 2\pi$. On obtient :

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(a+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a+re^{it})dt. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_1(a) = Re(\varphi(a)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re(\varphi(a+re^{it}))dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(a+re^{it})dt,$$

avec $f_1 = Re(f)$. De même, en remplaçant f_1 par $f_2 = Im(f)$ on montre que $Im(f(a)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Im(f(a+re^{it}))dt$. On obtient donc

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt,$$

sous l'hypothèse f harmonique sur $D(a,\rho)$ avec $\rho > r$.

Dans le cas général, on a, pour tout $s < r$,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+se^{it})dt.$$

En faisant tendre s vers r et par continuité de f sur $\overline{D(a,r)}$, on obtient :

$$f(a) = \lim_{s \to r^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + se^{it})dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt.$$

Calculons à présent $\frac{1}{\pi r^2} \iint_{\overline{D(a,r)}} f(x+iy)dxdy$. En posant $x + iy = se^{i\theta}$ (ce qui donne $dxdy = sdsd\theta$) et grâce à la continuité de f sur le compact $\overline{D(a,r)}$ (ce qui implique que f est uniformément bornée) on peut alors calculer l'intégrale double de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \iint_{\overline{D(a,r)}} f(x+iy)dxdy &= \int_0^r \int_0^{2\pi} f(a+se^{i\theta})sdsd\theta \\ &= \int_0^r s \left(\int_0^{2\pi} f(a+se^{i\theta})d\theta \right) ds \\ &= \int_0^r s(2\pi f(a))ds \\ &= 2\pi f(a)\tfrac{r^2}{2} = \pi r^2 f(a). \end{aligned}$$

$\square$

Nous allons à présent démontrer le **Principe du maximum** pour les fonctions harmoniques **à valeurs réelles** et définies sur un ouvert **connexe**.

Corollaire 1.2.4 (Principe du Maximum) *Soit Ω un ouvert **connexe** et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Si f admet un **maximum relatif** sur Ω, alors f est constante.*

Preuve : Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des maxima relatifs de f sur Ω. Supposons que $\mathcal{S}$ est non vide. Soit $a \in \mathcal{S}$ et soit $D(b,r)$ un disque ouvert centré en b, de rayon r, contenant a et contenu dans Ω (cf. Figure 1.1).

Puisque $a \in \mathcal{S}$, il existe $\rho > 0$ tel que $\overline{D(a,\rho)} \subset D(b,r)$ et tel que $f(a) \geq f(z)$ pour tout $z \in \overline{D(a,\rho)}$. D'après le Corollaire 1.2.3, nous avons :

$$f(a) = \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{\overline{D(a,\rho)}} f(x+iy)dxdy.$$

Comme $\pi\rho^2 = \iint_{\overline{D(a,\rho)}} dxdy$, on a donc $f(a) = \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{\overline{D(a,\rho)}} f(a)dxdy$, et ainsi

$$\iint_{\overline{D(a,\rho)}} (f(a) - f(x+iy))dxdy = 0,$$

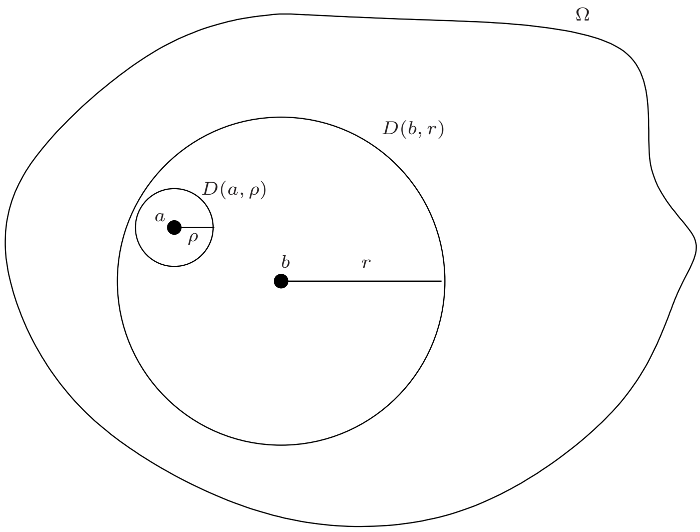

FIG. 1.1 – Principe du maximum

avec $(x,y) \longmapsto f(a) - f(x+iy)$ continue et positive sur $\overline{D(a,\rho)}$. Ainsi $f(z) = f(a)$ pour tout $z \in \overline{D(a,\rho)}$. De ce fait $D(a,\rho) \subset \mathcal{S}$ et donc $\mathcal{S}$ est ouvert dans Ω.

Nous allons montrer qu'en fait $f(z) = f(a)$ pour tout $z \in D(b,r)$, autrement dit que f est constante sur tout disque ouvert contenu dans Ω et contenant un maximum relatif. D'après l'assertion 2. du Corollaire 1.2.2, il existe une fonction φ holomorphe sur $D(b,r)$ telle que $f = Re(\varphi)$ sur $D(b,r)$. Nous venons de montrer que nécessairement $Re(\varphi)$ était constante sur $D(a,\rho)$. D'après les équations de Cauchy-Riemann, $Im(\varphi)$ est également constante sur $D(a,\rho)$. Il résulte du **principe des zéros isolés** que φ est constante sur $D(b,r)$. Ainsi f est elle aussi constante sur $D(b,r)$.

Nous allons montrer à présent que $\mathcal{S}$ est aussi fermé dans Ω. Soit $u \in \Omega \cap \overline{\mathcal{S}}$. Soit $s > 0$ tel que $D(u,s) \subset \Omega$. Comme $u \in \overline{\mathcal{S}}$, $D(u,s) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$. D'après ce qui précède, on a donc $D(u,s) \subset \mathcal{S}$ et donc en particulier, $u \in \mathcal{S}$, ce qui prouve que $\mathcal{S}$ est fermé dans Ω.

Comme $\mathcal{S} \neq \emptyset$ est un sous-ensemble à la fois ouvert et fermé de Ω qui est connexe, on obtient $\mathcal{S} = \Omega$. La fonction f est donc localement constante sur Ω. Comme par hypothèse f (de classe C^2) est continue, f est donc constante sur Ω.

$\square$

Nous terminerons cette section avec un dernier corollaire.

Corollaire 1.2.5 *Soit K un compact non vide de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction (à valeurs complexes) continue sur K et harmonique sur l'intérieur de K, $\overset{\circ}{K}$. Alors*

$$\sup_{z\in K}|f(z)| = \sup_{z\in Fr(K)}|f(z)|,$$

où $Fr(K)$ désigne la frontière de K.

Preuve : Comme une fonction continue sur un compact atteint son supremum, il existe $z_0 \in K$ tel que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ pour tout $z \in K$. Si $z_0 \in Fr(K)$, la preuve du corollaire est terminé.
Supposons que $z_0 \in \overset{\circ}{K}$. Soit $\mathcal{U}$ la composante connexe de z_0 dans $\overset{\circ}{K}$. Rappelons que les composantes connexes de tout ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}$ sont à la fois ouvertes et fermées dans $\mathcal{V}$ (cf. Chap. II, § 9, Remarque 9 de [19]). Ceci résulte en fait d'un résultat beaucoup plus général qui dit que les composantes connexes de tout espace localement connexe sont à la fois ouvertes et fermées (cf. Chap. II, § 9, Théorème 2.9.19 de [19]).
Supposons que $|f(z_0)| > 0$ et posons $g(z) = \dfrac{|f(z_0)|}{f(z_0)}f(z)$. Par construction, g est harmonique sur $\overset{\circ}{K}$, $|g(z)| = |f(z)|$ pour tout $z \in K$ et $g(z_0) = |f(z_0)|$. Pour $z \in K$, on a :

$$Re(g(z)) \leq |g(z)| = |f(z)| \leq |f(z_0)| = g(z_0) = Re(g(z_0)).$$

D'après le Corollaire 1.2.4, $Re(g)$ est constante sur l'ouvert connexe $\mathcal{U}$. Comme $Re(g)$ est continue sur $\overline{\mathcal{U}}$, $Re(g)$ est constante sur $\overline{\mathcal{U}}$. Il existe donc $z_1 \in Fr(\mathcal{U})$ tel que $Re(g(z_1)) = Re(g(z_0)) = g(z_0)$. On a donc

$$|f(z_1)| \geq Re(g(z_1)) = g(z_0) = |f(z_0)| \geq |f(z_1)|.$$

Par conséquent, $|f(z_1)| = |f(z_0)|$ et $|f|$ atteint son maximum en z_1 avec $z_1 \in Fr(\mathcal{U})$. Comme $\mathcal{U}$ est une composante connexe de $\overset{\circ}{K}$, $\mathcal{U}$ est fermé dans $\overset{\circ}{K}$. On en déduit que nécessairement $z_1 \in Fr(K)$ car $z_1 \in \overset{\circ}{K}$ implique $z_1 \in \mathcal{U}$ puisque $\overline{\mathcal{U}} \cap \overset{\circ}{K} = \mathcal{U} \cap \overset{\circ}{K}$. Ceci termine la preuve du corollaire.

$\square$

1.3 Formule de Poisson

Définition 1.3.1 *Pour $0 \leq r < 1$, $t \in \mathbb{R}$, on pose*

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int}.$$

Pour r fixé, $0 \leq r < 1$, P_r est appelé un ***noyau de Poisson*** *et $(P_r)_{0 \leq r < 1}$ est appelée la* ***famille des noyaux de Poisson****.*

Remarque 1.3.1

1. *Pour r fixé, $0 \leq r < 1$, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int}$ converge normalement, donc uniformément en t. La fonction P_r est continue sur $[0, 2\pi]$*

2. *Pour r fixé, $0 \leq r < 1$, on a*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) dt = 1.$$

Pour voir ceci, on peut inverser l'intégrale et la série qui définit $P_r(t)$ ou encore remarquer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) dt = \widehat{P_r}(0)$, le 0-ième coefficient de Fourier de la fonction continue P_r.

Proposition 1.3.1 *Pour $z = re^{i\theta}$ avec $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\begin{aligned} P_r(\theta - t) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta - t)) && (1.1) \\ &= Re \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) && (1.2) \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2}. && (1.3) \end{aligned}$$

Preuve : La première égalité est immédiate. Elle provient du fait que

$$P_r(\theta - t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\theta - t)} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in(\theta - t)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta - t)).$$

Pour démontrer la deuxième égalité on remarque que :

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} = \frac{1 + re^{i(\theta - t)}}{1 - re^{i(\theta - t)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - re^{i(\theta-t)} + 2re^{i(\theta-t)}}{1 - re^{i(\theta-t)}} = 1 + \frac{2re^{i(\theta-t)}}{1 - re^{i(\theta-t)}} \\
&= 1 + 2re^{i(\theta-t)} \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\theta-t)} \\
&= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\theta-t)}.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$Re \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta - t)) = P_r(\theta - t).$$

La troisième égalité s'obtient en remarquant que :

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{(e^{it} + z)(e^{-it} - \overline{z})}{|e^{it} - z|^2} = \frac{1 - |z|^2 + (ze^{-it} - \overline{z}e^{it})}{|e^{it} - z|^2}.$$

Comme $ze^{-it} - \overline{z}e^{it}$ est imaginaire pur,

$$Re \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} = \frac{1 - r^2}{|e^{it} - z|^2} = \frac{1 - r^2}{|1 - ze^{-it}|^2} = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i(\theta-t)}|^2}.$$

Enfin on calcule

$$\begin{aligned}
|1 - re^{i(\theta-t)}|^2 &= |1 - r\cos(\theta - t) - ir\sin(\theta - t)|^2 \\
&= (1 - r\cos(\theta - t))^2 + r^2 \sin^2(\theta - t) \\
&= 1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t),
\end{aligned}$$

et la preuve de la proposition est achevée.

□

Remarque 1.3.2 *Il résulte de la proposition précédente qu'un noyau de Poisson est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{T}$, 2π-périodique, positive et paire.*

La proposition suivante nous montre comment construire des fonctions harmoniques dans $\mathbb{D}$ à partir de mesures complexes sur $\mathbb{T}$.

Proposition 1.3.2 *Soit μ une mesure complexe sur $\mathbb{T}$. Pour $z = re^{i\theta}$ avec $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$P(\mu)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(e^{it}).$$

Alors P_μ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$.

Preuve : La mesure complexe μ est de la forme $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ avec μ_1 et μ_2 mesures réelles définies par $\mu_1(A) = Re(\mu(A))$ et $\mu_2(A) = Im(\mu(A))$ pour tout borélien A de $\mathbb{T}$. Ainsi $P(\mu)(z) = P(\mu_1)(z) + iP(\mu_2)(z)$ et pour montrer que P_μ (avec μ mesure complexe sur $\mathbb{T}$) est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ il suffit de montrer que si ν est une mesure **réelle** sur $\mathbb{T}$ alors $P(\nu)$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$. Pour cela on remarque que :

$$P(\nu)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) d\nu(e^{it}) = Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\nu(e^{it})\right) = Re(\varphi(z)),$$

avec $\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\nu(e^{it})$. La fonction φ étant holomorphe sur $\mathbb{D}$ (comme intégrale de la fonction holomorphe $z \longmapsto \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ sur $\mathbb{D}$), d'après le Corollaire 1.2.1, $P(\nu)$ est harmonique sur $\mathbb{D}$. Ceci termine la preuve de la proposition.

□

Le théorème suivant est la solution du **problème de Dirichlet** que l'on peut formuler ainsi :

Etant donnée une fonction f continue sur $\mathbb{T}$, trouver une fonction g continue sur le disque fermé unité $\overline{\mathbb{D}}$, harmonique dans $\mathbb{D}$ et telle que $g_{|\mathbb{T}} = f$.

Théorème 1.3.1 *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{T}$. Alors il existe une unique fonction g continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, harmonique dans $\mathbb{D}$ et vérifiant $g_{|\mathbb{T}} = f$. De plus, pour $z = re^{i\theta}$ avec $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt$. On notera $P(f)$ la fonction définie par $re^{i\theta} \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt$.*

Preuve : Montrons tout d'abord l'**unicité** de la solution du problème de Dirichlet. Soient g_1 et g_2 deux solutions du problème de Dirichlet. D'après le Corollaire 1.2.5, comme $g_1 - g_2$ est continue sur le compact $\overline{\mathbb{D}}$ et harmonique sur $\mathbb{D}$, on a :

$$\sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}}\{|g_1(z) - g_2(z)|\} = \sup_{z\in\mathbb{T}}\{|g_1(z) - g_2(z)|\} = 0,$$

puisque $g_1(z) = f(z) = g_2(z)$ sur $\mathbb{T}$. Ceci termine la preuve de l'unicité de la solution du problème de Dirichlet.

Montrons à présent l'**existence** d'une solution au problème de Dirichlet. D'après la Proposition 1.3.2, $P(f)$ est harmonique sur $\mathbb{D}$. Posons $\tilde{P}(f)(z) = \begin{cases} P(f)(z) & \text{si } |z| < 1 \\ f(z) & \text{si } |z| = 1 \end{cases}$.

Il nous reste à démontrer la continuité de $\tilde{P}(f)$ sur $\overline{\mathbb{D}}$. Pour cela nous allons montrer que $\tilde{P}(f)$ est la limite uniforme de fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$.

La **première étape** consiste à vérifier que pour toute fonction f continue sur $\mathbb{T}$ on a :

$$|\tilde{P}(f)(z)| \leq \|f\|_\infty \text{ pour } |z| \leq 1. \tag{1.4}$$

Pour $|z| < 1$, $z = re^{i\theta}$, on a :

$$\begin{aligned} |\tilde{P}(f)(z)| &= |P(f)(z)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) |f(e^{it})| dt \\ &\leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) dt \\ &= \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

En effet, comme $s \longmapsto P_r(s)$ est 2π périodique et paire, via le changement de variable $s = t - \theta$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) dt &= \int_0^{2\pi} P_r(t - \theta) dt \\ &= \int_{-\theta}^{-\theta + 2\pi} P_r(s) ds \\ &= \int_0^{2\pi} P_r(s) ds \\ &= 2\pi, \end{aligned}$$

d'après la Remarque 1.3.1. Comme pour $|z| = 1$, par définition, on a $|\tilde{P}(f)(z)| = |f(z)|$, l'inégalité (1.4) est vérifiée.

Pour $p \in \mathbb{Z}$, on considère la fonction e_p fonction continue de $\mathbb{T}$ dans lui-même définie par $e_p(e^{it}) = e^{ipt}$. C'est aussi la fonction $z \longmapsto z^p$ si $p \geq 0$ et $z \longmapsto \overline{z}^{-p}$ si $p < 0$. La solution au problème de Dirichlet est triviale pour les fonctions e_p : il s'agit de la fonction $g(z) = z^p$ sur $\overline{\mathbb{D}}$ si $p \geq 0$ et $g(z) = \overline{z}^{-p}$ si $p < 0$ (fonctions harmoniques sur $\mathbb{D}$ d'après la Proposition 1.2.1). La **deuxième étape** consiste à montrer que $\tilde{P}(e_p)$ est $z \longmapsto z^p$ si $p \geq 0$ et est égale à $z \longmapsto \overline{z}^{-p}$ si $p < 0$. Ceci nous montrera que $\tilde{P}(e_p)$ **est continue sur**

$\overline{\mathbb{D}}$ **pour tout** $p \in \mathbb{Z}$. Pour $z = re^{i\theta}$ avec $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, par définition, nous avons :

$$\tilde{P}(e_p)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) e^{ipt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta - t)} \right) e^{ipt} dt.$$

Comme, pour r fixé, $0 \leq r < 1$, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta - t)}$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 2\pi]$, on peut inverser l'intégrale et la somme dans l'égalité ci-dessus. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \tilde{P}(e_p)(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{r^{|n|} e^{in\theta t}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)} dt \\ &= r^{|p|} e^{ip\theta}, \end{aligned}$$

car $\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)t} dt = 0$ si $p \neq n$ et $\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)t} dt = 2\pi$ si $p = n$. On obtient ainsi, pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, $\tilde{P}(e_p)(z) = z^p$ si $p \geq 0$ et $\tilde{P}(e_p)(z) = \overline{z}^{-p}$ si $p < 0$.

Nous allons à présent conclure la preuve du théorème en utilisant le **théorème de Fejér**. Rappelons qu'un polynôme trigonométrique est une application p définie sur $\mathbb{T}$ de la forme $e^{it} \longmapsto \sum_{|n| \leq k} c_n e^{int}$ avec $c_n \in \mathbb{C}$. Autrement dit $p = \sum_{|n| \leq k} c_n e_n$. Par définition, de façon évidente, nous avons :

$$\tilde{P}(p) = \sum_{|n| \leq k} c_n \tilde{P}(e_n).$$

Ainsi, d'après la deuxième étape, $\tilde{P}(p)$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ pour tout polynôme trigonométrique p. D'après le Théorème de Fejér, il existe une suite de polynômes trigonométriques $(p_m)_{m \geq 1}$ telle que $\lim_{m \to \infty} \|f - p_m\|_\infty = 0$. Il nous reste à vérifier que $\tilde{P}(f)$ est la limite uniforme de $\tilde{P}(p_m)$. Pour cela, on remarque que, par définition, $\tilde{P}(f)(z) - \tilde{P}(p_m)(z) = \tilde{P}(f - p_m)(z)$. De plus, d'après (1.4), $|\tilde{P}(f - p_m)(z)| \leq \|f - p_m\|_\infty$ et donc

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |\tilde{P}(f)(z) - \tilde{P}(p_m)(z)| \leq \lim_{m \to \infty} \|f - p_m\|_\infty = 0.$$

Ainsi $\tilde{P}(f)$ est bien continue sur $\mathbb{T}$ comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{T}$. Ceci termine la preuve du théorème.

$\square$

Remarque 1.3.3 *Si f est une fonction harmonique réelle sur $D(0,r)$ avec $r \geq 1$, on a :*

$$f(z) = Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}f(e^{it})dt\right) \text{ pour } |z| \leq 1$$

et la fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}f(e^{it})dt$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$. On a ainsi redémontré le résultat annoncé par le Théorème 1.2.1 de façon constructive.

Si l'on souhaite trouver une solution au problème de Dirichlet en remplaçant le disque unité $\mathbb{D}$ par un disque quelconque de $\mathbb{C}$, il suffit de faire un changement de variable. C'est ce que nous dit le corollaire suivant.

Corollaire 1.3.1 *Soient $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Pour toute fonction f continue sur $\Gamma(a,R)$ où $\Gamma(a,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = R\}$, il existe une unique fonction g continue sur $\overline{D(a,R)} := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq R\}$, harmonique sur $D(a,R) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ et telle que $g_{|\Gamma(a,R)} = f$. De plus, si $z = a + re^{i\theta}$ avec $0 \leq r < R$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a :*

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{r/R}(\theta - t)f(a + Re^{it})dt.$$

Preuve : Comme dans la preuve du Théorème 1.3.1, l'unicité de la solution résulte du principe du maximum. Pour démontrer l'existence d'une solution g posons $f_1(z) = f(a+Rz)$ pour $|z| = 1$. Comme f_1 est continue sur $\mathbb{T}$, d'après le Théorème 1.3.1, il existe une fonction g_1 harmonique sur $\mathbb{D}$, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et telle que la restriction de g_1 à $\mathbb{T}$ coïncide avec f_1. On pose $g(z) = g_1\left(\frac{z-a}{R}\right)$ pour $z \in \overline{D(a,r)}$. Par construction on vérifie aisément que g vérifie les hypothèses du corollaire. Notons aussi que

$$P_{r/R}(\theta - t) = \frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{1 - 2\frac{r}{R}\cos(\theta - t) + \frac{r^2}{R^2}} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2}.$$

□

D'après le Corollaire 1.2.3, si une fonction f est harmonique sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ alors f vérifie la "propriété de la moyenne" sur Ω, i.e., pour $a \in \Omega$ et pour tout disque fermé $\overline{D(a,r)}$ tel que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ on a $f(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt$. Le théorème suivant est en quelque sorte la réciproque de ce résultat : on montre que si f vérifie la **propriété de la moyenne faible** (condition un peu moins forte que la propriété de la moyenne) sur Ω, nous pourrons conclure à l'harmonicité de la fonction f sur Ω.

Théorème 1.3.2 *Soit f une fonction continue sur Ω vérifiant la propriété suivante dite* ***"propriété de la moyenne faible"*** *sur Ω : pour tout $a \in \Omega$, il existe une suite $(r_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs tels que $\overline{D(a, r_n)} \subset \Omega$, $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ et $f(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a+r_n e^{it})dt$ pour tout $n \geq 1$. Alors f est harmonique sur Ω.*

Preuve : En considérant séparément $Re(f)$ et $Im(f)$ on peut se limiter au cas où f est à valeurs réelles. Soit $R > 0$ tel que $\overline{D(a, R)} \subset \Omega$. D'après le Corollaire 1.3.1, puisque f est continue sur le cercle $\Gamma(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = R\}$, il existe une fonction g réelle, continue sur $\overline{D(a, R)}$, harmonique sur $D(a, R)$ et telle que g et f soient égales sur $\Gamma(a, R)$. La fonction g, étant harmonique sur $D(a, R)$, vérifie la propriété de la moyenne sur $D(a, R)$ et donc elle vérifie aussi la propriété de la moyenne faible sur $D(a, R)$. Ainsi la fonction $h := g - f$ réelle vérifie la propriété de la moyenne faible sur $D(a, R)$ et h est identiquement nulle sur $\Gamma(a, R)$. Soit $m = \sup_{z\in\overline{D(a,R)}} h(z)$ et soit

$$K = \{\xi \in \overline{D(a, R)} : h(\xi) = m\}.$$

Comme h est continue sur le compact $\overline{D(a, R)}$, K est un compact non vide de $\overline{D(a, R)}$. Supposons que $m > 0$. Alors $K \subset D(a, R)$. Soit z_0 un point de la frontière de K en lequel la fonction continue sur le compact K définie par $z \longmapsto |z - a|$ atteint son maximum. Comme h vérifie la propriété de la moyenne faible sur $D(a, R)$, il existe une suite $(r_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs tels que $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, $\overline{D(z_0, r_n)} \subset D(a, R)$ avec

$$m = h(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0 + r_n e^{it})dt.$$

On a donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (h(z_0) - h(z_0 + r_n e^{it}))dt = 0,$$

avec $t \longmapsto h(z_0) - h(z_0 + r_n e^{it})$ continue, réelle et positive sur $[0, 2\pi]$. Par conséquent $h(z_0) = h(z_0 + r_n e^{it})$ et donc $\Gamma(z_0, r_n) \subset K$, ce qui est absurde d'après le choix de z_0. On obtient ainsi $m = 0$ (puisque $h(z) = 0$ pour $z \in \Gamma(a, R)$) et donc $h(z) \leq 0$ pour $z \in \overline{D(a, R)}$. En appliquant un raisonnement analogue à $-h$ on montre que $h(z) \geq 0$ pour $z \in \overline{D(a, R)}$. Finalement $h(z) = 0$ pour $z \in \overline{D(a, R)}$. La fonction f est donc harmonique car elle coïncide avec une fonction harmonique au voisinage de tout point de Ω.

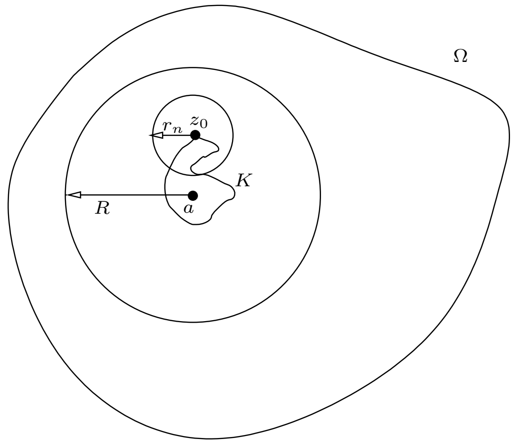

FIG. 1.2 – Propriété de la moyenne faible et harmonicité

□

Remarque 1.3.4 *Soit f est une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La fonction f est harmonique sur Ω.*
2. *La fonction f vérifie la "propriété de la moyenne faible" sur Ω.*
3. *La fonction f vérifie la "propriété de la moyenne" sur Ω.*

1.4 Exercices

Exercice 1.4.1

1. *Soient u et v deux fonctions harmoniques à valeurs réelles dans un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. A quelles conditions la fonction uv est-elle harmonique ?*

   (remarquer que la réponse dépend fortement du fait que les fonctions considérées sont à valeurs réelles).
2. *Montrer que u^2 ne peut être harmonique dans Ω que si u est constante.*
3. *Pour quelles fonctions $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ la fonction $|f|^2$ est-elle harmonique ?*

Exercice 1.4.2

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ harmonique et telle que f^2 est harmonique.

1. *Démontrer que f ou $\overline{f}$ est holomorphe.*
2. *Si l'on remplace l'hypothèse "f^2 est harmonique" par $|f|^2$ est harmonique, que dire de f ?*

Exercice 1.4.3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ ne s'annulant pas sur Ω.

Démontrer que $\log |f|$ est harmonique en calculant son laplacien.

Exercice 1.4.4

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ ne s'annulant pas sur Ω.

Démontrer que $\log |f|$ est harmonique (sans calculer son laplacien !).

Exercice 1.4.5

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique. Montrer que si $g : \Omega \to \mathbb{C}$ défini par $g(z) = zf(z)$ est harmonique alors f est analytique sur Ω.

Exercice 1.4.6

Soit f une fonction de classe C^3 sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

1. *Démontrer que si f est harmonique sur Ω, les dérivées partielles de f sont elles aussi harmoniques.*

2. *Vérifier par un calcul direct que pour t fixé, $re^{i\theta} \longmapsto P_r(\theta - t)$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$.*
3. *En déduire (sans introduire de fonction holomorphe) que l'intégrale de Poisson $P(\mu)$ de toute mesure de Borel finie sur $\mathbb{T}$ est harmonique dans $\mathbb{D}$ en montrant que toute dérivée partielle de $P(\mu)$ est égale à l'intégrale de la dérivée correspondante du noyau.*

Exercice 1.4.7

1. *Soit u une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$ et telle que $u(0) = 1$. Majorer et minorer du mieux possible $u(1/2)$.*
2. *Soit $f = u + iv$, $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$ et $|u| \leq 1$ sur $\mathbb{D}$. Pour $0 < r < 1$, majorer $|f(re^{i\theta})|$.*

Exercice 1.4.8

Soit u une fonction Lebesgue-mesurable dans un ouvert connexe Ω et appartenant localement à L^1 (cela signifie que l'intégrale de $|u|$ sur tout sous-ensemble compact de Ω est finie). Démontrer que u est harmonique si elle satisfait la forme suivante de la propriété de la moyenne :

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\overline{D(a,r)}} u(x,y)\,dxdy,$$

dès que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$.