Math I Analyse
Feuille 3 : Suites réelles

1 Existence et calculs de limites

Exercice 1. En n'utilisant que la définition d'une limite, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{3}{2}.$$

Exercice 2. Etudier l'existence d'une limite pour les suites suivantes.

1. $u_n = \frac{n}{n+1}$
2. $u_n = \frac{5n^4+7n^3}{6n^2+1}$
3. $u_n = \frac{3n^2+2}{5n+1}$
4. $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels
5. $u_n = \frac{\sin(n)+(-1/2)^n}{n}$
6. $u_n = \left(\sqrt{2}-1\right)^n + \left(1/3\right)^n$
7. $u_n = 1 + \frac{1}{2010} + \left(\frac{1}{2010}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2010}\right)^n$
8. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
9. $u_n = n\cos n + 2n$
10. $u_n = n^4\ sin(n^2\pi/2)$.

Exercice 3. Montrer que toute suite réelle convergente est bornée.

Exercice 4. Montrer que pour tous réels a et b, $||a|-|b|| \leq |a-b|$. En déduire que si une suite u_n tend vers l, la suite $|u_n|$ tend vers $|l|$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5. (Suites arithmétiques) Soit $r \in \mathbb{R}$ fixé et (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé, et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.
1) Calculer u_1, u_2, u_3.
2) Calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
3) La suite (u_n) est-elle monotone ? Si oui, préciser si elle est croissante ou décroissante en fonction du signe de r.
4) La suite est-elle convergente ? Bornée ?
On définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
5) Calculer le terme général v_n en fonction de n. La suite (v_n) est-elle convergente ?

Exercice 6. On étudie la convergence d'une suite géométrique de raison a.

1) i) Rappeler la formule du binôme de Newton.

ii) Soit $a > 1$. En écrivant $a = 1 + b$, avec $b > 0$, montrer que $a^n \geq 1 + nb$.

iii) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

2) En déduire que si $0 \leq a < 1$, $\lim_{n \to +\infty} a^n = 0$.

3) Si $a \geq 0$, conclure que $u_n = a^n$ est convergente si et seulement si $0 \leq a \leq 1$.

Exercice 7. (Suite arithmético-géométrique). Trouver le terme général de la suite u_n définie par la récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont deux réels.

Exercice 8. Soit u la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$, si $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que (u_n) est croissante et majorée.
2. Montrer que (u_n) converge vers le nombre réel positif l qui vérifie l'équation $l^2 - l - 1 = 0$ et calculer l.

Exercice 9. 1) Soit (u_n) une suite réelle.

i) On suppose : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ k \in]0, 1[: \forall\, n \geq n_0,\ |u_{n+1}| \leq k|u_n|$. Montrer que $\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n = 0$

ii) On suppose : (u_n) est à valeurs strictement positives et $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ k > 1 : \forall\, n \geq n_0,\ u_{n+1} \geq ku_n$. Montrer que $u_n \longrightarrow +\infty$.

iii) Application : montrer que $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \lim_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

2) Généralisation : on considère (u_n) suite à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers l.

i) Si $l > 1$, $u_n \longrightarrow +\infty$.

ii) Si $l < 1$ alors $u_n \longrightarrow 0$.

Indication pour i) (respectivement pour ii)) : montrer qu'il existe $k > 1$ (respectivement $k < 1$), $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, n \geq n_0,\ u_{n+1} \leq ku_n$ (respectivement $u_{n+1} \geq ku_n$).

Exercice 10. Montrer que les suites (u_n) suivantes sont convergentes, et calculer leur limite :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}.$$

Exercice 11. (Développement décimal)
On considère la suite réelle $(u_n)_n$ de terme général

$$u_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}}$$

1) Montrer que la suite (u_n) converge, et calculer sa limite.

2) Calculer la limite des suites $(5u_n)$ et $(9u_n)$.

Exercice 12. Le théorème de Césaro

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle, on définit la suite (v_n) par $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1) On suppose que (u_n) converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$.
   i) Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > N,\ |u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   ii) En déduire que $\forall\, n \geq N, \left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n} u_k\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   iii) Montrer qu'il existe $N' \geq N :\ \forall n \geq N', \left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} u_k\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   iv) En déduire que $\forall\, n > N'$, $|v_n| \leq \varepsilon$, et conclure que (v_n) converge vers 0.

2) On suppose que (u_n) converge vers l, montrer que (v_n) converge vers l. Indication : considérer la suite $u_n - l$ et appliquer le 1).

3) Que peut on dire de v_n lorsque u_n tend vers $+\infty$?

4) Le lemme de l'escalier : soit (u_n) une suite telle que $(u_{n+1} - u_n)$ soit convergente de limite l. Montrer que $(\frac{u_n}{n})$ est convergente de limite l.
Indication : appliquer le théorème de Césaro à la suite $(u_{n+1} - u_n)$.

2 Monotonie, suites extraites, critère de Cauchy

Exercice 13. Dans les cas suivants, la suite (u_n) est-elle monotone ? Sinon, a-t-elle des sous suites monotones ?

a) $u_n = (-1)^n$
b) $u_n = n + (-1)^n$
c) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$
d) $u_n = \frac{n}{n+1}$
e) $u_n = n^2$
f) $u_n = n + 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, (on pourra calculer et comparer u_0, u_1, u_2, u_3).

Exercice 14. a) Soit (u_n) telle que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite l. Montrer qu'alors u_n converge vers l.
b) Soit (u_n) telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) soient convergentes (cette fois sans hypothèse sur la valeur de leur limite). Montrer que les trois limites sont en fait égales, et que u_n converge vers cette limite.

Exercice 15. Le nombre e :
On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.\,n!}$$

a) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. On admettra que leur limite commune est e.
b) Montrer que e est irrationnel.
Indication : raisonner par l'absurde : on suppose que $e = \frac{p}{q}$, alors $u_q \leq e \leq v_q$, en utilisant le fait que $e.q!$ est entier, montrer que $e = u_q$ et expliquer en quoi c'est absurde.

Exercice 16. On définit la suite (u_n) par $u_n = \dfrac{\sin 1}{3} + \dfrac{\sin 2}{3^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{3^n}$. Montrer que la suite (u_n) est de Cauchy. Conclure.

Exercice 17. Série harmonique.

Soit (H_n) définie par $H_0 = 0$, et pour $n \geq 1$: $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Etudier la monotonie de H_n.
2) Montrer que $\forall\, m \in \mathbb{N},\ H_{2^{m+1}} - H_{2^m} \geq \frac{1}{2}$.
3) En déduire $H_{2^m} \geq \dfrac{m}{2} + 1$, puis $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $H_n \geq \dfrac{1}{2}(\log_2 n + 1)$.
   Indication : utiliser m tel que $m \leq \log_2 n \leq m+1$, et remarquer que pour m ainsi défini, $H_{2^m} \leq H_n$.
4) Conclure : la suite (H_n) diverge vers $+\infty$.
5) Conclure directement en montrant que (H_n) n'est pas de Cauchy.

Exercice 18. Autre série de Riemann.
En utilisant le critère de Cauchy, montrer que la suite de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}$$

converge.