Mathématiques - Asinsa 2

Année 2008/2009 - semestre 2

DEVOIR DE MATHEMATIQUES – Durée : 3h00

- *Tous documents, y compris les calculatrices, et tous moyens de communication sont interdits.*
- *Une attention toute particulière sera portée sur la rédaction des copies.*
- *Un barème est donné à titre indicatif.*

Exercice 1 (5 points)

Le but de cet exercice est d'observer l'effet d'une perturbation sur une racine d'un polynôme. Dans tout cet exercice on considèrera deux polynômes à coefficients réels P et Q, et on notera f l'application définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$f(\varepsilon, x) = P(x) + \varepsilon Q(x).$$

1. Dans cette question, on étudie le cas particulier suivant $P = X^2 - 1$ et $Q = X^3$.

   (a) Montrer qu'au voisinage du point $(0, 1)$ l'équation $f(\varepsilon, x) = 0$ est équivalente à une équation de la forme $x = \varphi(\varepsilon)$, où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

   (b) Donner un développement limité à l'ordre 1 de la fonction φ au voisinage de 0.

   De la même façon, on peut montrer (et on l'admettra ici) qu'au voisinage du point $(0, -1)$ l'équation $f(\varepsilon, x) = 0$ est équivalente à une équation de la forme $x = \psi(\varepsilon)$, où ψ vérifie au voisinage de 0
   $$\psi(\varepsilon) = -1 - \frac{\varepsilon}{2} + o(\varepsilon).$$

   (c) En déduire que pour ε assez petit (mais non nul) le polynôme $P + \varepsilon Q$ admet trois racines réelles : $\varphi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$ et une troisième racine que l'on notera $\xi(\varepsilon)$.

   (d) Montrer que pour ε assez petit (mais non nul) on a $\varphi(\varepsilon) + \psi(\varepsilon) + \xi(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}$.

   (e) En déduire le développement généralisé à l'ordre 1 de ξ au voisinage de 0, c'est-à-dire un développement de la forme $\xi(\varepsilon) = \frac{a}{\varepsilon} + b + c\,\varepsilon + o(\varepsilon)$.

   (f) Montrer que pour ε assez petit et strictement positif on a $\xi(\varepsilon) < \psi(\varepsilon) < \varphi(\varepsilon)$.

2. Dans cette question, P et Q sont deux polynômes à coefficients réels quelconques. On note α une racine réelle du polynôme P.

   (a) Montrer que si α est une racine simple du polynôme P alors au voisinage du point $(0, \alpha)$ l'équation $f(\varepsilon, x) = 0$ est équivalente à une équation de la forme $x = \varphi(\varepsilon)$, où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(b) Trouver un exemple de deux polynômes P et Q, et d'une racine réelle α de P pour lesquels on ne peut pas écrire l'équation $f(\varepsilon, x) = 0$ sous la forme $x = \varphi(\varepsilon)$ pour (ε, x) au voisinage de $(0, \alpha)$.

Exercice 2 (5 points)

Etant donnée une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme $|||\cdot|||$ définie pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$|||\mathrm{A}||| = \sup\left\{\frac{\|\mathrm{A}x\|}{\|x\|}\ ;\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}.$$

1. Montrer que pour toutes matrices A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on a $|||\mathrm{AB}||| \leqslant |||\mathrm{A}|||\ |||\mathrm{B}|||$.

   On note I la matrice unité d'ordre n et on considère à partir de maintenant une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $|||\mathrm{M}||| < 1$.

2. (a) Montrer que -1 n'est pas une valeur propre de M.
   (b) En déduire que $\mathrm{I} + \mathrm{M}$ est une matrice inversible.

3. Soit $(\sigma_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite[1] de matrices de terme général $\sigma_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\,\mathrm{M}^k$.
   (a) Montrer que la suite $(\sigma_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
   (b) Pourquoi peut-on en déduire que la suite $(\sigma_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge ?

4. Soit $(\tau_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $\tau_p = (\mathrm{I} + \mathrm{M})\sigma_p$.
   (a) Montrer que la suite $(\tau_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers I.
   (b) En déduire la limite de la suite $(\sigma_p)_{p\in\mathbb{N}}$.
   (c) Établir que $|||(\mathrm{I} + \mathrm{M})^{-1}||| \leqslant \big(1 - |||\mathrm{M}|||\big)^{-1}$.

Problème (10 points)

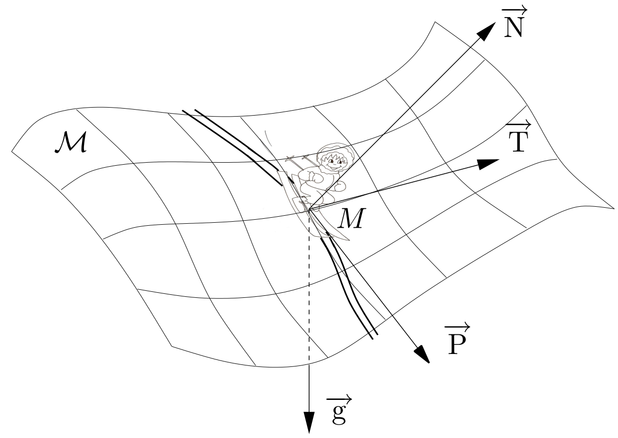
Le but de ce problème est d'étudier la trajectoire "optimale" d'un skieur.
La montagne sur laquelle se déplace le skieur est décrite par une surface cartésienne $\mathcal{M}$ d'équation

$$\mathcal{M} \quad : \quad z = f(x, y).$$

La coordonnée z correspond à l'altitude. La force de gravité qui s'exerce sur le skieur est donc de la forme $\overrightarrow{\mathrm{g}} = (0, 0, -g)$, le réel g étant supposé constant ($g \approx 9.8\,m.s^{-1}$). La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sera supposée de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Dans cette question, on considère un point M de la surface $\mathcal{M}$ de coordonnées (x, y, z).

[1]Par convention, on a posé $\mathrm{M}^0 = \mathrm{I}_n$.



(a) On note $\overrightarrow{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur normal à la surface $\mathcal{M}$ en ce point M. Exprimer les coefficients a et b en fonction des dérivées partielles de l'application f.

(b) Calculer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ tangent à la surface $\mathcal{M}$ au point M et orthogonal[2] au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{g}}$.

(c) En déduire que le vecteur

$$\overrightarrow{\mathrm{P}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\partial_x f(x, y) \\ -\partial_y f(x, y) \\ -\left(\partial_x f(x, y)^2 + \partial_y f(x, y)^2\right) \end{pmatrix}$$

est un vecteur qui est à la fois tangent à la surface $\mathcal{M}$ au point M et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{T}}$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ obtenu à la question précédente est appelé vecteur de plus grande pente. Il correspond à un vecteur tangent à la montagne et dirigé vers le bas.

   (a) On considère une montagne "plane" $\mathcal{M}_1$ d'équation cartésienne $z = x$. Donner les coordonnées du vecteur de plus grande pente en tout point de cette montagne.

   (b) On considère une montagne $\mathcal{M}_2$ d'équation cartésienne $z = x^2 + y^2$. Dessiner cette montagne et donner les coordonnées du vecteur de plus grande pente en tout point.

3. La trajectoire "optimale" d'un skieur est une trajectoire telle qu'à chaque instant le skieur suit la direction du vecteur de plus grande pente. On notera $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{M}$ la position initiale du skieur sur la montagne. Sa trajectoire est alors décrite par la courbe paramétrée

$$\gamma : s \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^3,$$

   où $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(s) = \overrightarrow{\mathrm{P}}(\gamma(s))$ pour tout $s \in \mathbb{R}^+$. Dans la suite, on notera $(x(s), y(s), z(s))$ les coordonnées de $\gamma(s)$.

   (a) Montrer que si le skieur suit une telle trajectoire γ alors il reste toujours sur la montagne (c'est-à-dire que pour tout $s \in \mathbb{R}^+$ on a $\gamma(s) \in \mathcal{M}$).

[2] L'orthogonalité à laquelle il est fait allusion ici est la notion "usuelle" d'orthogonalité dans l'espace $\mathbb{R}^3$. En particulier le produit scalaire entre les vecteurs (x, y, z) et (x', y', z') vaut $xx' + yy' + zz'$.

(b) Quelle est la trajectoire γ_1 d'un skieur sur la montagne $\mathcal{M}_1$ s'il part du point $(0,0,0)$?

(c) Quelle est la trajectoire γ_2 d'un skieur sur la montagne $\mathcal{M}_2$ s'il part du point $(1,0,1)$? On dessinera cette dernière trajectoire sur le graphe de la montagne $\mathcal{M}_2$ obtenu à la question 2.(b).

4. On appelle un point stationnaire pour le skieur, un point de la montagne $\mathcal{M}$ où le skieur peut s'arrêter, c'est-à-dire un point $\gamma(s)$ pour lequel $\gamma'(s)=0$.

   (a) Montrer que $(x_1,y_1,z_1)\in\mathcal{M}$ est un point stationnaire pour le skieur si et seulement si $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ est un point critique pour f.

   (b) En quel(s) point(s) le skieur peut-il s'arrêter sur les montagnes $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$?

5. On rappelle que la longueur d'une courbe paramétrée par $\gamma : \,]a,b[\, \mapsto \mathbb{R}^3$ est définie par la quantité $L(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'(s)\|\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

   (a) Calculer la longueur de la trajectoire du skieur sur la montagne $\mathcal{M}_1$ lorsqu'il part du point de coordonnées $(0,0,0)$.

   (b) Calculer[3] la longueur de la trajectoire du skieur sur la montagne $\mathcal{M}_2$ lorsqu'il part du point de coordonnées $(1,0,1)$.

6. Dans cette question on considère une montagne $\mathcal{M}_3$ décrite par $z=f(x,y)$ où l'application f est définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y)=y^2+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}.$$

   (a) Montrer que l'application f possède exactement trois points critiques, dont l'un est un point col.

   (b) D'où[4] doit partir le skieur sur la montagne $\mathcal{M}_3$ pour arriver au point col ?

   (c) Où s'arrêtera le skieur s'il part d'un point de coordonnées $(x_0,y_0,z_0)\in\mathcal{M}_3$ avec $x_0>0$?

[3] On pourra utiliser le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\operatorname{argsh}(x)\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$.

[4] Pour cette question et pour la question suivante, on admettra que la seule solution x de l'équation différentielle $x'(s)=x(s)-x(s)^3$ qui s'annule ou qui tend vers 0 en $+\infty$ est la solution nulle $x=0$.