

ASINSA MATHEMATICS LEVEL TEST 2007 / TEST DE NIVEAU EN MATHÉMATIQUES 2007
Duration : 2 hours / Durée : 2 heures

The following exercises are independant and can be solved in any order. Calculators are not allowed. Answers to exercices 1 to 3 must be written in the boxes next to the questions. Solutions to exercices 4 to 8 must be written in French or in English.

Les exercices sont indépendants et peuvent être résolus dans un ordre quelconque. Les calculatrices sont interdites. Les réponses aux exercices 1 à 3 doivent être données en face des questions. Les solutions aux exercices 4 à 8 doivent être rédigées en français ou en anglais.

Family Name / Nom	First Name/ Prénom	School / Ecole	City / Ville

EXERCISE 1

Find the following limits / Calculer les limites suivantes :

	Answer/Réponse		Answer/Réponse
1 . $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x}$		2 . $\lim_{x \rightarrow 0} (\exp(x) - 1) \log(x)$	
3 . $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi x)}{x+1}$		4 . $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log(x) - 1}{x - e}$	
5 . $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1 - \cos(3x)}}$		6 . $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \log\left(\frac{x-1}{2x^2+3}\right)$	

EXERCISE 2

Differentiate with respect to x (give a simplified expression) / Calculer les dérivées en x (donner le résultat sous forme simplifiée) :

	Answer/Réponse		Answer/Réponse
1 . $\cos^2(3x^4)$		2 . $\frac{1}{\tan^2(\frac{x}{2})}$	
3 . $\sqrt{x+1} + 1/x$		4 . $\frac{1}{\sqrt{x + \exp(x)}}$	
5 . $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$		6 . $\exp(\exp(x))$	

EXERCISE 3

Compute the following definite integrals / *Calculer les intégrales suivantes :*

	Answer/Réponse		Answer/Réponse
1 . $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$		2 . $\int_1^e \frac{\log(x)}{x} dx$	
3 . $\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\sqrt{2+\cos^2(x)} dx$		4 . $\int_0^{\pi/3} \sin^4(x) dx$	
5 . $\int_0^1 (x-1) \exp(-x) dx$		6 . $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)} dx$	

EXERCISE 4

Consider the two complex numbers $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{4}$ and $z_2 = 1-i$. / *Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{4}$ et $z_2 = 1-i$.*

1 . a) Compute the modulus and the argument of the z_1 and z_2 . / *Calculer le module et l'argument de z_1 et z_2 .*

b) Compute the real part, the imaginary part, the modulus and the argument of $Z = \frac{z_1}{z_2}$. / *Donner la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de $Z = \frac{z_1}{z_2}$.*

2 . Deduce the values of $\cos(\pi/12)$ and $\sin(\pi/12)$. / *En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et de $\sin(\pi/12)$.*

3 . Solve the following equation for x a real number : $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos(x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(x) = 2$. / *Résoudre l'équation $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos(x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(x) = 2$ d'inconnue réelle x .*

EXERCISE 5

1 . Prove that for all $x \in [0, \frac{1}{2}\pi[$ we have : / *Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}\pi[$ on a : $0 \leq \tan(x) - x \leq x \tan^2(x)$.*

2 . Let f be the function defined by : / *Soit f la fonction définie par :*

$$f : x \in]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[\mapsto \begin{cases} \tan(x)/x & \text{if/si } x \neq 0 \\ 1 & \text{if/si } x = 0 \end{cases} .$$

a) Show that f is continuous in $x = 0$. / *Montrer que f est continue en $x = 0$.*

b) Compute $f'(0)$. / *Calculer $f'(0)$.*

c) Compute the derivative of f for $x \neq 0$. / *Calculer la dérivée de f pour $x \neq 0$.*

EXERCISE 6

Let $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be the sequences of real number defined by : / *Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites de réels définies par :*

$$u_n = 2^n \sin(2^{-n}\pi) \quad \text{and/et} \quad v_n = 2^n \tan(2^{-n}\pi).$$

1 . Show that the sequence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is increasing and that $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is decreasing. / *Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.*

2 . Show that the sequences $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge to a same limit. Give the value of this limit. / *Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite. Calculer cette limite.*

EXERCISE 7

Prove that we have $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$ for all integer $n \geq 1$.

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$.

EXERCISE 8

Find the height of a right circular cylinder of maximum volume which can be inscribed in a sphere of radius R . / *Calculer la hauteur du cylindre à base circulaire de volume maximal qu'il est possible d'inscrire dans une sphère de rayon R .*