

COURS METHODES MATHEMATIQUES POUR L'INGENIEUR 2

Cours de filière MAM, ISTIL deuxième année

Ionel Sorin CIUPERCA

Le but de ce cours est d'introduire un outil très utilisé dans la modélisation mathématique : **les distributions**.

Le cours s'adresse en principal à des élèves des écoles d'ingénieurs filière modélisation mathématique.

La plupart des résultats sont donnés sans démonstration, les détails des preuves étant données en classe.

Table des matières

1	Une introduction intuitive à la théorie de la mesure et à l'intégrale de Lebesgue	3
1.1	La mesure de Lebesgue	3
1.2	L'intégrale de Lebesgue	6
1.3	Les espaces de Lebesgue	8
2	La théorie des distributions.	9
2.1	Introduction	9
2.2	L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions test	11
2.3	La notion de distribution	13
2.4	Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$	15
2.5	Dérivation des distributions	16
2.6	Produit entre une fonction C^∞ et une distribution	19
2.7	Primitives des distributions en dimension 1	20
3	Convolution des distributions et applications à la résolution des équations différentielles	21
3.1	Support d'une distribution	21
3.1.1	Support d'une fonction	21
3.1.2	Définition du support d'une distribution	22
3.2	La convolution des distributions	23
3.3	Applications à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants	26
3.3.1	Généralités	26
3.3.2	Solution fondamentale du laplacien et applications	28

Chapitre 1

Une introduction intuitive à la théorie de la mesure et à l'intégrale de Lebesgue

1.1 La mesure de Lebesgue

On va introduire d'abord la mesure de Lebesgue qui est en fait un nombre réel positif (≥ 0) qu'on associe à "tout" ensemble de \mathbb{R}^n .

En fait on n'associera à tout ensemble de \mathbb{R}^n une mesure mais seulement à certains ensembles qu'on peut grouper dans une collection des ensembles appelée *tribu de Lebesgue*. Mais on évitera les complications mathématiques et on fait comme si on associe une mesure à tout ensemble de \mathbb{R}^n . En fait les ensembles auxquelles on n'associe pas de mesure sont des ensembles qui ne sont jamais utilisés dans les applications (des ensembles qui ne sont pas intuitives!).

Dans la suite pour tout ensemble X on notera $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X .

Définition 1.1. Soit X un ensemble et soit $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty] \equiv \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On dit que μ est une *mesure* sur X si

a) $\mu(\emptyset) = 0$ (ici \emptyset est l'ensemble vide)

b) Pour toute suite des ensembles $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec $A_n \subset X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et avec A_n disjointes deux à deux ($A_n \cap A_m = \emptyset$, $\forall n \neq m$) on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Conséquences :

1) Si $A_1, A_2, \dots, A_n \subset X$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ alors

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

En particulier, pour tous $A, B \subset X$ avec $A \cap B = \emptyset$ on a

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

2) Si $A, B \subset X$ avec $A \subset B$ alors

$$\mu(A) \leq \mu(B)$$

(car $B = A \cup (B - A)$ avec $A \cap (B - A) = \emptyset$ donc $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$. Mais comme $\mu(B - A) \geq 0$, on a le résultat.)

Dans la suite on va s'intéresser à des mesures définies sur l'espace euclidien \mathbb{R}^n .

Proposition 1.2. (Résultat admis) Il existe une mesure λ_n sur \mathbb{R}^n telle que pour tout ensemble P du type "pavé ouvert" de la forme

$$P =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\cdots]a_n, b_n[\subset \mathbb{R}^n$$

avec $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n$, on a

$$\lambda_n(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Cette mesure λ_n s'appelle **mesure de Lebesgue** sur \mathbb{R}^n .

Remarque 1.3. Cette proposition nous donne :

Si $n = 1$ et $P =]a, b[$, alors $\lambda_1(P) = b - a$. Dans ce cas la mesure est la **longueur** du segment $]a, b[$.

Si $n = 2$ et $P =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$, alors $\lambda_2(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ et la mesure est **l'aire** du rectangle $]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$.

Si $n = 3$ et $P =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times]a_3, b_3[$, alors $\lambda_3(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$ et la mesure est le **volume** du parallélépipède $]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times]a_3, b_3[$.

Alors la mesure de Lebesgue généralise respectivement la longueur, l'aire, le volume des ensemble en \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 respectivement.

Remarque 1.4. Pour calculer la mesure de Lebesgue d'un ensemble quelconque en \mathbb{R}^n il faut décomposer cet ensemble en une union (éventuellement infinie) des pavés et faire la somme des mesures de chaque pavé. Pour un ensemble arbitraire ceci peut être assez compliqué (par exemple pour un disque dans le plan). On verra plus loin une méthode plus simple pour calculer la mesure de Lebesgue d'un ensemble arbitraire.

Le résultat suivant dit que la mesure de Lebesgue de tout singleton est égale à zéro :

Proposition 1.5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\lambda_n(\{x\}) = 0.$$

Démonstration. voir cours. □

On déduit alors que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ on a

$$\lambda_1(]a, b]) = \lambda_1([a, b]) = \lambda_1([a, b]) = \lambda_1(]a, b[) = b - a$$

(car par exemple $]a, b] =]a, b[\cup \{b\}$ donc $\lambda_1(]a, b]) = \lambda_1(]a, b[) + \lambda_1(\{b\})$ et on a le résultat en utilisant le fait que $\lambda_1(\{b\}) = 0$.)

On a aussi :

Proposition 1.6. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est au plus dénombrable (c'est à dire finie ou dénombrable) alors $\lambda_n(A) = 0$.

Démonstration. voir cours. □

Exemples :

1. L'ensemble $\{1, 2\}$ est un ensemble de mesure de Lebesgue 0 en \mathbb{R} .
2. L'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels est un ensemble de mesure de Lebesgue 0 en \mathbb{R} .
De même \mathbb{Q}^n est de mesure de Lebesgue 0 en \mathbb{R}^n .

Question : Y-a-t'il des ensembles de mesure nulle qui ne soient pas au plus dénombrable ?
La réponse est OUI, au moins en \mathbb{R}^n avec $n \geq 2$, comme il résulte de la proposition suivante :

Proposition 1.7. Soit A est un segment en \mathbb{R}^2 , par exemple de la forme :
 $A = [a, b] \times \{c\}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors la mesure de Lebesgue de A en \mathbb{R}^2 est nulle (c'est à dire $\lambda_2(A) = 0$).

Démonstration. voir cours. □

Ce résultat peut se généraliser au cas d'une courbe arbitraire en \mathbb{R}^2 , ayant une certaine régularité (par exemple de classe C^1 par morceaux). En fait on a le résultat général suivant (preuve assez difficile) :

Proposition 1.8. Toute variété (avec une certaine régularité) de dimension $m < n$ dans \mathbb{R}^n est de mesure de Lebesgue 0 en \mathbb{R}^n .

Conséquence : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et régulier et $\partial\Omega$ sa frontière. Alors on a $\lambda_n(\partial\Omega) = 0$ (car $\partial\Omega$ est une variété de dimension $n - 1$ en \mathbb{R}^n). Ceci implique immédiatement : $\lambda_n(\bar{\Omega}) = \lambda_n(\Omega)$, où $\bar{\Omega}$ est l'adhérence de Ω en \mathbb{R}^n .

Définition 1.9. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On dira qu'une propriété sur A a lieu *presque pour tous* $x \in A$ (on va noter : *p.p.* $x \in A$) si l'ensemble des $x \in A$ sur lequel la propriété n'a pas lieu est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \text{ et } x \neq 3 \end{cases}$$

Alors $f(x) = 0$, *p.p.* $x \in \mathbb{R}$ (car l'ensemble des x tels que $f(x) \neq 0$ est $\{1, 3\}$ qui est un ensemble de mesure nulle).

1.2 L'intégrale de Lebesgue

On ne donnera pas la définition exacte de l'intégrale de Lebesgue, car ceci demande un appareil mathématique assez élaboré. On donnera en fait de manière intuitive cette notion, en donnant ses propriétés, car elle ressemble à l'intégrale de Riemann.

Dans la suite on va noter $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \equiv [-\infty, +\infty]$. On utilise les conventions : $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ et $\infty - \infty$ n'est pas définie.

“Définition” :

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. L'intégrale de Lebesgue de f sur A (quand elle existe) est un élément $\in \overline{\mathbb{R}}$ noté $\int_A f(x) d\lambda_n$ ou aussi $\int_A f(x) dx$, qui satisfait les propriétés (L1)-(L10) données ci-dessus.

Les propriétés de l'intégrale de Lebesgue sont les suivantes :

(L1) Pour toute constante $c \in \mathbb{R}$ on a $\int_A c dx = c\lambda_n(A)$.

Conséquence : $\lambda_n(A) = \int_A 1 dx$.

(L2) (linéarité) : Si $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ alors

$$\int_A [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)] dx = \alpha_1 \int_A f_1(x) dx + \alpha_2 \int_A f_2(x) dx.$$

(L3) (relation de Chasles) Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ alors

$$\int_{A_1 \cup A_2} f dx = \int_{A_1} f dx + \int_{A_2} f dx.$$

(L4) Si $B \subset \mathbb{R}^n$ avec $\lambda_n(B) = 0$ et $f : B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ alors

$$\int_B f(x) dx = 0.$$

(L5) Si f est intégrable sur A et $f(x) = g(x)$ p.p. $x \in A$ alors g est intégrable sur A et $\int_A f(x) dx = \int_A g(x) dx$.

Conséquence : Si $f(x) = 0$ p.p. $x \in A$ alors $\int_A f(x) dx = 0$.

(L6) (intégration des inégalités) Si $f(x) \leq g(x)$ p.p. $x \in A$ alors $\int_A f(x) dx \leq \int_A g(x) dx$.

(L7) Si $f(x) \geq 0$ p.p. $x \in A$ et $\int_A f(x) dx = 0$ alors $f(x) = 0$ p.p. $x \in A$.

(L8) (inégalité triangulaire) $|\int_A f(x) dx| \leq \int_A |f(x)| dx$.

(L9) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction continue par morceaux (c'est à dire : il existe une partition $A_1, A_2 \dots A_m$ de Ω telle que f soit continue à l'intérieur $\overset{\circ}{A}_i$ de chaque A_i). Alors f est intégrable Lebesgue sur Ω si et seulement si f est intégrable Riemann sur Ω et en plus on a

$$\int_{\Omega} f(x) d\lambda_n = \int_{\Omega} f(x) dx$$

où la deuxième intégrale désigne l'intégrale de Riemann sur Ω et cette intégrale s'écrit encore

$$\sum_{i=1}^m \int_{A_i} f(x) dx.$$

Remarque 1.10. Donc dans la “plupart” des cas rencontrés dans les applications, l’intégrale de Lebesgue et celle de Riemann coïncident.

Exemple 1. Soit $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ \frac{1}{x^3} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases} \quad (1.1)$$

Alors

$$\int_{]-1, +\infty[} f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^{\infty} f(x) dx = 2 + \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^{\infty} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Exemple 2. (exemple de fonction intégrable Lebesgue et non-intégrable Riemann)

Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Q \cap]0, 1[\\ 0 & \text{si } x \in (\mathbb{R} - Q) \cap]0, 1[. \end{cases} \quad (1.2)$$

où Q désigne l’ensemble des nombres rationnels. D’un exemple précédent on sait que la mesure de Lebesgue de Q (donc de $Q \cap]0, 1[$) est nulle, donc on a $f(x) = 0$ p.p. $x \in]0, 1[$ donc de la Conséquence de **L5**) on déduit que f est intégrable Lebesgue et que

$$\int_{]0, 1[} f d\lambda_1 = 0.$$

D’autre part il est bien connu que la fonction f n’est pas intégrable au sens de Riemann. Ceci semble contredire la propriété **L9**) mais la fonction f n’est continue en **aucun point**, donc la propriété **L9**) ne s’applique pas.

L10) (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite des fonctions $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ intégrables Lebesgue sur A et f une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

i) : $f_k(x) \rightarrow f(x)$ pour $k \rightarrow +\infty$, p.p. $x \in A$ (convergence simple)

ii) : Il existe $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonction Lebesgue intégrable avec $g(x) \geq 0$, p.p. $x \in A$ telle que

$$|f_k(x)| \leq g(x), \quad \text{p.p. } x \in A, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Alors f est intégrable Lebesgue sur A et en plus

$$\int_A f_k(x) dx \rightarrow \int_A f(x) dx, \quad \text{pour } k \rightarrow +\infty.$$

On finit cette section en remarquant que la notion d’intégrabilité Lebesgue s’étend de manière naturelle à des fonctions $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ avec \mathbb{C} l’ensemble complexe : si $f = f_1 + if_2$ avec $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $i = \sqrt{-1}$, on dit que f est intégrable Lebesgue si et seulement si f_1 et f_2 sont intégrables Lebesgue. En plus on a :

$$\int_A f d\lambda_n = \int_A f_1 d\lambda_n + i \int_A f_2 d\lambda_n \quad \text{et aussi l’inégalité triangulaire :} \\ \left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx.$$

1.3 Les espaces de Lebesgue

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et p un nombre tel que $1 \leq p \leq +\infty$.

Cas 1) $1 \leq p < +\infty$.

On définit l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty\}.$$

avec aussi la convention qu'on "ne distingue pas" deux fonctions qui sont égales presque partout.

Par exemple, la fonction u définie sur \mathbb{R} qui est égale partout à zéro sauf dans un point où elle vaut 1, est considérée comme l'élément zéro de $L^p(\mathbb{R})$ (on confond cette fonction avec la fonction 0).

La raison de cette convention supplémentaire est le fait que nous voulons que $L^p(\Omega)$ soit un *espace de Banach* muni de la norme $\|u\|_{L^p(\Omega)} = [\int_{\Omega} |u(x)|^p dx]^{1/p}$. Alors il doit satisfaire une propriété essentielles : $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 0 \implies u = 0$; si u est tel que $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 0$ alors en utilisant **L7)** on déduit $u = 0$ mais pas nécessairement partout sur Ω mais seulement *p.p.* $x \in \Omega$; c'est pourquoi on doit confondre toute fonction égale presque partout à zéro avec la fonction zéro.

En fait la définition complète de $L^p(\Omega)$ est plus compliquée et elle fait appel à la notion de *classes d'équivalence*.

Cas 2) $p = +\infty$.

On définit

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \exists a \geq 0, |u(x)| \leq a, \text{ p.p. } x \in \Omega\}.$$

avec la même convention : on confond les fonctions égales presque partout.

Il est facile de voir que toute fonction bornée est un élément de $L^\infty(\Omega)$. Un exemple de fonction non bornée qui est dans $L^\infty(\Omega)$ est la fonction définie sur \mathbb{R} et qui vaut 0 partout, sauf dans les points $n \in \mathbb{N}^*$ où elle vaut n . La propriété de la définition est vraie pour tout $a \geq 0$; en fait on *confond* cette fonction avec la fonction nulle.

L'ensemble $L^\infty(\Omega)$ est aussi un *espace de Banach* muni de la norme

$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{a \geq 0, |u(x)| \leq a, \text{ p.p. } x \in \Omega\}$. Cette dernière quantité s'appelle *le supremum essentiel* de $|u|$ et le plus souvent il n'est autre que $\sup_{x \in \Omega} |u(x)|$.

Chapitre 2

La théorie des distributions.

2.1 Introduction

Une distribution est une sorte de “fonction généralisée” et elle est introduite pour modéliser des phénomènes où les fonctions habituelles ne sont pas très pratiques à utiliser. Commençons par l'exemple suivant : supposons qu'on a un signal physique d'une très grande intensité sur une région très petite dans l'espace (par exemple une charge électrique très concentrée dans un petit voisinage d'un point, et nulle ailleurs ; c'est ce que les physiciens appellent une *charge ponctuelle*). Supposons que la quantité totale de charge est connue, égale par exemple à 1. Nous pouvons considérer une densité de charge (pour simplifier on suppose que la charge est en dimension 1 et qu'elle est concentrée autour du point 0) qui sera une fonction $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\rho(x) = \begin{cases} \text{”grande”} & \text{si } x \in \text{”petit” intervalle autour de 0} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

mais de tel sorte que $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$.

On peut donner comme exemple d'une telle densité la fonction

$$\rho(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

avec n un nombre très grand, qui peut être en général assez mal connu (difficile de savoir dans un cas donné si on a $n = 1000$ ou $n = 1200$, etc.).

On aimerait avoir une limite, pour $n \rightarrow +\infty$ d'une telle fonction.

Le physicien P. Dirac a introduit et utilisé une fonction $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ qui est vue comme un sorte de “limite” pour $n \rightarrow +\infty$ de la fonction définie en (2.1). La fonction δ (appelée aussi la *fonction de Dirac*) est telle que

1. $\delta(0) = +\infty$
2. $\delta(x) = 0, \quad \forall x \neq 0$

$$3. \int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1.$$

L'existence d'une telle fonction contredit la théorie de la l'intégration au sens de Lebesgue, car de la propriété 2. on déduit $\delta = 0$ p.p. $x \in \mathbb{R}$ donc $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 0$ ce qui est en contradiction avec 3.

On introduira une limite de la fonction ρ définie en (2.1) qui sortira du cadre des fonctions ; ça sera une *distribution*.

Un exemple dans l'électrostatique.

Supposons qu'on a une charge électrique qui occupe un volume $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et qui est donnée par une densité de charge $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Dans la réalité une telle fonction est assez mal connue (on ne peut disposer que des approximations) car aucun appareil de mesure ne peut nous donner la valeur de ρ dans un point x de Ω . Ceci parce que tout appareil ne peut mesurer que l'effet produit sur lui par les charges situés dans un voisinage de ce point. En plus il y a une infinité des points $x \in \Omega$.

En fait l'experimentateur accède indirectement à la densité de charge $\rho(x)$ par ses propriétés, c'est à dire, en mesurant non pas $\rho(x)$ mais des quantités physiques importantes, faisant intervenir ρ , comme par exemple :

1. La charge totale

$$Q = \int_{\Omega} \rho(x) dx$$

2. La charge dans un sous-domaine ω de Ω

$$Q_{\omega} = \int_{\omega} \rho(x) dx$$

(donc on peut noter $Q = Q_{\Omega}$)

3. Le potentiel dans un point $a \in \mathbb{R}^3$:

$$V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(x)}{|x-a|} dx$$

avec ϵ_0 une constante physique, où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne d'un vecteur.

Ce sont en fait des quantités du type

$$\int_{\Omega} \rho(x)\varphi(x) dx \tag{2.2}$$

avec $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ données par exemple par

$\varphi \equiv 1$ pour Q

$\varphi = 1_{\omega}$ pour Q_{ω}

$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x-a|}$ pour V_a .

On pourrait considérer de manière théorique toutes les intégrales du type (2.2) pour "toute" fonction φ . Il est alors naturel d'introduire une application

$$T_\rho : \text{"un ensemble des fonctions test"} \rightarrow C$$

$$T_\rho(\varphi) = \int_\Omega \rho(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi$$

Théoriquement, si on connaît toutes les intégrales du type (2.2) pour tous φ alors on "aurait suffisamment d'information" pour caractériser ρ , donc T_ρ est une autre manière de se donner ρ ; ceci à condition d'avoir :

$$\rho_1 \neq \rho_2 \implies T_{\rho_1} \neq T_{\rho_2}$$

(on va détailler ceci ultérieurement).

Dans la suite on introduira de manière rigoureuse des applications plus générales que T_ρ .

2.2 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions test

Partout dans ce cours, Ω désigne un ouvert dans \mathbb{R}^n .

Définition 2.1. Soit $\varphi : \Omega \rightarrow C$ (C désigne l'ensemble des nombres complexes) une fonction continue. On appelle **support** de φ (notation $\text{supp}(\varphi)$) l'adhérence en \mathbb{R}^n de l'ensemble $\{x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}$ (l'ensemble de non-annulation de φ).

Le support est toujours **fermé**. On pourrait travailler aussi en \mathbb{R} , mais on préfère C (plus général).

Notation : On note par $C_0^\infty(\Omega)$ ou encore $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\varphi : \Omega \rightarrow C$ (\mathbb{R} si travail en \mathbb{R}) **indéfiniment différentiables** et à **support compact et inclus en Ω** .

Notation : Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $\forall j = 1, \dots, n$ on utilisera la notation

$$D^\alpha \varphi = \begin{cases} \varphi & \text{si } \alpha = (0, \dots, 0) \\ \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3)$$

où on a noté $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Quelques exemples fondamentaux : (voir cours pour d'autres exemples)

Exemple 1.

La fonction constante 0 est toujours un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$, car son support est l'ensemble vide qui est considéré comme un compact inclus dans tout ensemble.

Exemple 2.

On considère $n = 1$ et $\Omega = \mathbb{R}$. On introduit la fonction $\theta_1 : \mathbb{R} \rightarrow C$ définie par

$$\theta_1(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Il est évident que l'ensemble de non-annulation de θ_1 est l'intervalle $] -1, 1[$, donc on a $\text{supp}(\theta_1) = [-1, 1]$; le support est donc un compact inclus dans \mathbb{R} . On montre aussi que

θ_1 est indéfini dérivable (*voir cours*) donc $\theta_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exemple 3.

Soit Ω ouvert en \mathbb{R}^n . Soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\prod_{k=1}^n [a_k - \epsilon, a_k + \epsilon] \subset \Omega.$$

On considère la fonction $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta_1\left(\frac{x_1 - a_1}{\epsilon}\right) \theta_1\left(\frac{x_2 - a_2}{\epsilon}\right) \dots \theta_1\left(\frac{x_n - a_n}{\epsilon}\right).$$

Il est facile de voir que ψ est un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Si on voit ψ comme une fonction définie sur Ω (en la restreignant à Ω) alors on a aussi $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

(*Question* : qui est le support de ψ ?)

Conséquence : L'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ ne se réduit pas à l'élément 0.

Exemple 4.

Si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $g \in C^\infty(\Omega)$ alors $fg \in \mathcal{D}(\Omega)$ (c'est évident : $fg \in C^\infty(\Omega)$ et en plus $\text{supp}(fg) \subset \text{supp}(g)$; donc comme $\text{supp}(g)$ est compact $\text{supp}(fg)$ est compact aussi).

Cet exemple donne une manière de construire "beaucoup" des éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ si on en connaît un seul ; exemple : $x\theta_1(x)$, $\sin(x)\theta_1(x)$ etc.. sont des fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.2. *Toute combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ est encore un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$ (c'est à dire : $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$).*

Preuve : voir cours.

Cette proposition nous dit en fait que $\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel complexe (réel si on travail en \mathbb{R}), vu comme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe des fonctions définies sur Ω à valeurs en \mathbb{C} , avec les opérations addition " + " et multiplication par des scalaires " \cdot " habituelles :

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega), \forall x \in \Omega$$

$$(\lambda \cdot \varphi)(x) = \lambda \cdot \varphi(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall x \in \Omega.$$

Dans la suite on introduira une **topologie** sur $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est à dire, une façon de dire qu'une suite des éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ est "proche" d'un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Définition 2.3. Soit $\{\varphi_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ une suite des éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On dit que $\varphi_p \rightarrow \varphi$ au sens de $\mathcal{D}(\Omega)$ (on sous-entend que pour $p \rightarrow +\infty$) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. Il existe un ensemble compact K fixe, indépendant de p , avec $K \subset \Omega$ tel que $\text{supp}(\varphi_p) \subset K, \forall p \in \mathbb{N}$ et aussi $\text{supp}(\varphi) \subset K$.

2. Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la suite $\{D^\alpha \varphi_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur K vers $D^\alpha \varphi$, c'est à dire

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_p(x) - D^\alpha \varphi(x)| \rightarrow 0 \quad \text{pour } p \rightarrow +\infty$$

Remarque 2.4. Ceci est une topologie plus compliquée que sur un espace de Banach X où on a simplement

$$x_p \rightarrow x \quad \text{si et seulement si} \quad \|x_p - x\|_X \rightarrow 0 \quad \text{pour } p \rightarrow +\infty.$$

2.3 La notion de distribution

Définition 2.5. On appelle **distribution** sur Ω toute application **linéaire** et **continue** de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans C ; c'est à dire, une application $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow C$ est une distribution sur Ω si elle satisfait les deux conditions suivantes :

1.

$$T(\beta_1 \varphi_1 + \beta_2 \varphi_2) = \beta_1 T(\varphi_1) + \beta_2 T(\varphi_2), \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in C, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$$

(*linéarité*).

2. Pour toute suite $\{\varphi_p\}_{p \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_p \rightarrow 0$ au sens $\mathcal{D}(\Omega)$ on a $T(\varphi_p) \rightarrow 0$ dans C (*continuité*).

Notation : On notera dans la suite par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble de toutes les distributions sur Ω . On dit aussi que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le **dual** de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Notation : On utilisera dans la suite la notation plus commode $\langle T, \varphi \rangle$ (crochet de dualité) au lieu de $T(\varphi)$, pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et tout élément $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (on appellera φ *fonction test* pour la distribution T).

Nous donnerons pour l'instant deux exemple fondamentaux des distributions. Le résultat suivant introduit les distributions du type Dirac.

Définition 2.6. Soit $a \in \Omega$ et considérons l'application $\delta_a : \Omega \rightarrow C$ définie par

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Alors δ_a est une distribution sur Ω appelée **distribution de Dirac en a sur Ω** .

Preuve du fait que δ_a est une distribution : voir cours.

Notation : Si $0 \in \Omega$ on notera δ_0 par δ ; cette distribution s'appellera simplement **distribution de Dirac sur Ω** .

Avant de donner le deuxième exemple fondamental des distributions on rappelle quelques notations très utilisées :

Notation : On note $C(\Omega)$ l'ensemble des fonctions **continues** sur Ω . Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $C^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions dérivables jusqu'à l'ordre k sur Ω avec toutes les

dérivées continues (une fonction u est dérivable jusqu'à l'ordre k si $D^\alpha u$ existe pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq k$); remarquons que $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Notation : Pour tout q tel que $1 \leq q < +\infty$ on note

$$L^q_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \text{ pour tout compact } K \subset \Omega \text{ on a } u \in L^q(K) \text{ (donc } \int_K |u(x)|^q dx < +\infty)\}$$

Remarque 2.7. 1.

$$L^q(\Omega) \subset L^q_{loc}(\Omega)$$

2.

$$C(\Omega) \subset L^q_{loc}(\Omega).$$

(preuves faciles laissées en exercice!)

Exemple : $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $u \equiv 1$. On a $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ mais $u \notin L^1(\mathbb{R})$.
(voir le cours pour d'autres exemples.)

Le deuxième exemple fondamental des distributions est le suivant :

Définition 2.8. Pour toute fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ on définit la distribution T_u de la manière suivante :

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La distribution T_u s'appelle **distribution régulière associée à u** .

Preuve du fait que T_u est une distribution : voir cours.

On a le lemme fondamental suivant :

Lemme 2.9. Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ est tel que

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

alors $u = 0$ p.p.

(voir cours pour une preuve dans le cas particulier u continue)

Remarque 2.10. Le lemme peut s'énoncer de la manière équivalente suivante :

$$T_u = 0 \implies u = 0.$$

Le but de ce qui suit est de justifier le fait que toute fonction qui est dans L^1_{loc} peut être vue comme une distribution.

On introduit l'application suivante :

$$\mathcal{G} : L^1_{loc}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{donnée par} \quad \mathcal{G}(u) = T_u \quad \forall u \in L^1_{loc}(\Omega).$$

L'application \mathcal{G} associe à chaque fonction u sa distribution régulière. Alors $\mathcal{G}(L^1_{loc}(\Omega))$ n'est autre que l'ensemble des distributions régulières.

Théorème 2.11. a) \mathcal{G} est un isomorphisme entre $L^1_{loc}(\Omega)$ et $\mathcal{G}(L^1_{loc}(\Omega))$.

b) \mathcal{G} n'est pas surjective (donc $\mathcal{G}(L^1_{loc}(\Omega)) \subsetneq \mathcal{D}'(\Omega)$).

Preuve : voir cours (remarquer que l'injectivité \mathcal{G} est une conséquence immédiate du Lemme 2.9). En particulier on démontre b) en montrant que les distributions de Dirac ne sont pas dans des distributions régulières.

L'intérêt de ce résultat est le fait qu'on peut "identifier" les deux espaces $L^1_{loc}(\Omega)$ et $\mathcal{G}(L^1_{loc}(\Omega))$ en identifiant en fait chaque fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ à sa distribution régulière T_u . Donc on va dire *par abus de langage* que u est une distribution en pensant en fait à T_u . On aura alors (en utilisant toujours cette identification) $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. (C'est analogue à l'inclusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ où on identifie chaque nombre réel x au nombre complexe $x + 0i$). C'est dans ce sens qu'on peut dire que les distributions **généralisent** les fonctions : une fonction localement intégrable est un cas particulier de distribution. De la preuve de **b)** Théorème 2.11 on déduit que les distributions de Dirac ne sont pas des fonctions.

On a l'analogie suivant de la Proposition 2.2 :

Proposition 2.12. Toute combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ est encore un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$ (c'est à dire : $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \forall T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ on a $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$).

Preuve : voir cours.

Cette proposition nous dit en fait que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est un espace vectoriel complexe (réel si on travail en \mathbb{R}), vu comme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe des applications de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans \mathbb{C} , avec les opérations addition " + " et multiplication par des scalaires " \cdot " habituelles :

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle, \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\langle \lambda \cdot T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

2.4 Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

On définira une convergence des suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (une topologie).

Définition 2.13. Soit $\{T_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ une suite des éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que $T_p \rightarrow T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ (on peut dire aussi : au sens des distributions en Ω) pour $p \rightarrow +\infty$ si

$$\langle T_p, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \text{pour } p \rightarrow +\infty, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemple : Considérons la suite des fonctions : $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f_p(x) = \begin{cases} \frac{p}{2} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{p} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5)$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$. Il est facile de voir que $f_p \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (on a même $f_p \in L^1(\mathbb{R})$). Alors f_p peut être vue comme une suite des distributions sur \mathbb{R} (on pense à T_{f_p}). On se demande si'il y

a une limite au sens des distributions de f_p .

On a le calcul suivant : pour toute φ fixée et arbitraire en $\mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\langle T_{f_p}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_p(x) \varphi(x) dx = \frac{p}{2} \int_{-1/p}^{1/p} \varphi(x) dx = \varphi(a_p)$$

avec $a_p \in]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}[$ (nous avons utilisé le **théorème de la moyenne** : $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi)$ avec $\xi \in]a, b[$, pour toute fonction continue f). Comme $|a_p| < \frac{1}{p}$ nous avons $a_p \rightarrow 0$ pour $p \rightarrow +\infty$ et par continuité de φ on a $\varphi(a_p) \rightarrow \varphi(0)$. On déduit alors

$$\langle T_{f_p}, \varphi \rangle \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

donc par définition

$$T_{f_p} \rightharpoonup \delta$$

ce qui s'écrit plus simplement (en "confondant" T_{f_p} et f_p) : $f_p \rightarrow \delta$ au sens des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Cet exemple est important car il donne un sens rigoureux à la fonction δ introduite de manière empirique par les physiciens (voir début paragraph 2.1). Donc la limite pour de tels fonctions comme celle donnée dans l'exemple ci-dessus sera une distribution.

Pour d'autres exemples, voirs cours

2.5 Dérivation des distributions

On veut définir la dérivée d'une distribution, de telle manière que si en particulier cette distribution est une fonction de classe C^1 alors la dérivée au sens des distributions soit tout simplement la dérivée au sens habituel.

Plus précisément, on veut : $\frac{\partial}{\partial x_k}(T_u) = T_{\frac{\partial u}{\partial x_k}}$ si $u \in C^1(\Omega)$. Faisons ceci dans le cas plus simple où Ω est un intervalle ouvert inclus dans \mathbb{R} . Soit $u \in C^1(\Omega)$. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on aurait :

$$\langle (T_u)', \varphi \rangle = \langle T_{u'}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u'(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \varphi'(x) dx + [u\varphi]_{x=a}^{x=b}$$

(on a utilisé l'intégration par parties). La dernière expression est égale à zero, car $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ce qui nous donne

$$\langle (T_u)', \varphi \rangle = - \langle T_u, \varphi' \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

On va prendre cette dernière relation comme définition de la dérivée pour **toute** distribution T . Il y a un calcul analogue pour la dérivation à un ordre $k \in \mathbb{N}^*$ arbitraire (faire plusieurs intégrations par parties successivement). Il est donc naturel d'avoir la définition suivante :

Définition 2.14. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On appelle **dérivée à l'ordre α de T** (on peut ajouter : *au sense de distributions*) la distribution sur Ω notée $D^\alpha T$ ou $\frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ définie par

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.6)$$

On admet que l'égalité (2.6) définit bien une distribution sur Ω .

Remarque : On peut dériver **toute** distribution et à n'importe quel ordre, le résultat étant encore une distribution. Ceci, contrairement à ce qui se passe pour les fonctions.

Cas particulier : Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Notation : Si $n = 1$ on va noter les dérivées d'une distribution T par $T', T'', T^{(3)}, \dots, T^{(k)}$ exactement comme les dérivées classiques d'une fonction à une variable (on utilise la convention habituelle $T^{(0)} = T$). On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemple : Soit Ω intervalle ouvert inclus dans \mathbb{R} et $u \in C^k(\Omega)$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors on a :

$$(T_u)^{(k)} = T_{u^{(k)}}.$$

(donc pour une fonction de classe C^k la dérivée k fois au sense des distributions se confond avec la dérivée k fois au sense habituel).

Preuve :

$$\langle (T_u)^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T_u, \varphi^{(k)} \rangle = (-1)^k \int_{\Omega} u \varphi^{(k)} = (-1)^{k-1} \int_{\Omega} u' \varphi^{(k-1)} = \dots = \int_{\Omega} u^{(k)} \varphi = \langle T_{u^{(k)}}, \varphi \rangle$$

(on a appliqué k fois l'intégration par parties et à chaque fois le terme "frontière" est égal à zero, car $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$).

Ce résultat se généralise en dimension quelconque :

Exemple : Soit Ω ouvert en \mathbb{R}^n et $u \in C^k(\Omega)$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors on a

$$D^\alpha (T_u) = T_{D^\alpha u}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq k.$$

Preuve : On fera la preuve pour $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_i}$; pour un α général le résultat se démontre facilement par recurrence.

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} (T_u), \varphi \right\rangle = - \left\langle T_u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx - \int_{\partial \Omega} u \varphi \nu_i d\sigma.$$

(nous avons appliqué la formule de **Green**, le dernier terme étant une intégrale sur la frontière de Ω ; ν_i désigne ici la i -ème composante du vecteur ν qui est le vecteur **normal**

à $\partial\Omega$ orienté vers l'extérieur de Ω). Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ l'intégrale sur $\partial\Omega$ est égale à zero et on obtient :

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(Tu), \varphi \rangle = \langle T \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle \quad \text{donc} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(Tu) = T \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Dans toute la suite du cours on appelle **fonction de Heaviside** la fonction $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie comme la fonction **indicatrice** de l'intervalle $[0, +\infty[$, donc

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Il est évident que $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ donc H peut être vue comme une distribution sur \mathbb{R} .

Exemple : Calculons la dérivée au sens des distributions de H (c'est à dire, calculons $(T_H)'$). Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x) dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0).$$

ce qui nous donne

$$(T_H)' = \delta \quad (2.8)$$

(on peut dire aussi : $H' = \delta$ au sens des distributions sur \mathbb{R}).

On peut définir un **opérateur** D^α qui associe à toute distribution T la distribution $D^\alpha T$. On a les propriétés suivantes de cet opérateur :

Proposition 2.15. *Pour toute $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et tous $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}^n$ on a*

$$D^\alpha(D^\gamma T) = D^\gamma(D^\alpha T) = D^{\alpha+\gamma}T.$$

Preuve : Exo facile.

Proposition 2.16. *(linéarité de D^α) :*

L'opérateur D^α est linéaire, c'est à dire :

$$D^\alpha(\beta_1 T_1 + \beta_2 T_2) = \beta_1 D^\alpha T_1 + \beta_2 D^\alpha T_2, \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}, \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Preuve : voir cours.

Proposition 2.17. *(continuité de D^α) :*

Soit $T_p \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour $p \rightarrow +\infty$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Alors

$$D^\alpha T_p \rightarrow D^\alpha T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{pour} \quad p \rightarrow +\infty.$$

Preuve : voir cours.

Exemple : *voir cours.*

2.6 Produit entre une fonction C^∞ et une distribution

On définira le produit entre une fonction C^∞ et une distribution de telle manière que si la distribution est une fonction localement intégrable, le résultat soit le produit habituel des fonction.

On voudrait donc : si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $g \in C^\infty(\Omega)$ alors $g \cdot T_u = T_{gu}$. On aurait alors pour tous $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle g \cdot T_u, \varphi \rangle = \langle T_{gu}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} gu\varphi dx = \langle T_u, g\varphi \rangle .$$

Il est alors naturel de donner la définition suivante :

Définition 2.18. Soit $g \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit le **produit de g par T** noté $g \cdot T$ comme la distribution définie par

$$\langle g \cdot T, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exo : montrer que $g \cdot T$ est bien une distribution.

Conséquences immédiates :

- Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors $g \cdot T_u = T_{gu}$.
- Si $f, g \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ alors $f \cdot (g \cdot T) = (fg) \cdot T$
- Si $g \equiv \text{constante} = \lambda$ alors $g \cdot T = \lambda T$ (c'est le produit entre le scalaire λ et T ; par exemple $1 \cdot T = T$).

Exemple : Soit $a \in \Omega$ et $g \in C^\infty(\Omega)$. Alors

$$g \cdot \delta_a = g(a)\delta_a.$$

(produit entre le scalaire $g(a)$ et la distribution δ_a).

Preuve : voir cours.

Conséquence : en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on a $x \cdot \delta = 0$

Proposition 2.19. Si $g \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ alors

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g \cdot T) = \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot T + g \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

(en dimension 1 cela devient : $(g \cdot T)' = g' \cdot T + g \cdot T'$).

Preuve : voir cours.

Exemple : En $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on peut calculer facilement $x \cdot \delta'$ de la manière suivante (sans passer par des fonctions test) :

$$(x \cdot \delta)' = x' \cdot \delta + x \cdot \delta' = \delta + x \cdot \delta'.$$

Comme $x \cdot \delta = 0$ donc $(x \cdot \delta)' = 0$ on déduit

$$x \cdot \delta' = -\delta.$$

2.7 Primitives des distributions en dimension 1

Dans cette partie on va étendre la notion de primitive des fonctions à des distributions (on se limitera à la dimension 1 uniquement).

Dans toute la suite de ce paragraphe on va supposer que Ω est un intervalle ouvert de \mathbb{R} que nous noterons I . On a $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Définition 2.20. Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$. On dit que $U \in \mathcal{D}'(I)$ est une **primitive** de T sur I si on a l'égalité

$$U' = T \quad \text{au sens des distributions } \mathcal{D}'(I).$$

Exemple : Si f est une fonction continue sur I et F en est une primitive au sens classique alors F est aussi une primitive au sens des distributions, c'est à dire : la distribution T_F est une primitive de la distribution T_f (car $(T_F)' = T_{F'} = T_f$).

Exemple : On a comme conséquence de (2.8) que H est une primitive de δ sur \mathbb{R} .

On a le résultat suivant :

Théorème 2.21. a) *Les seules primitives au sens des distributions sur I de la fonction 0 sont les fonctions constantes.*

b) *Toute distribution $T \in \mathcal{D}'(I)$ admet au moins une primitive $U \in \mathcal{D}'(I)$. En plus toute primitive de T est de la forme $U + M$ avec M une fonction constante (donc on n'a pas l'unicité de la primitive, on a unicité à une constante additive près).*

Preuve : voir cours.

Exemple : On a vu que sur \mathbb{R} la fonction H est une primitive (au sens des distributions) de δ . Alors l'ensemble des primitives de δ est l'ensemble des toutes les distributions de la forme $H + M$ avec M constante.

Utilité des primitives : résoudre des équations différentielles avec des données et inconnues distributions (*voir TD*).

Chapitre 3

Convolution des distributions et applications à la résolution des équations différentielles

Le but de ce chapitre est d'étendre la notion de convolution (connue pour les fonctions) à des distributions et montrer comment cette notion s'utilise pour la résolution des équations différentielles.

3.1 Support d'une distribution

3.1.1 Support d'une fonction

Nous rappelons que pour une fonction **continue** on avait défini son **support** comme l'adhérence de l'ensemble de **non-annulation** de la fonction. On donnera dans la suite la notion de support pour toute fonction définie sur \mathbb{R} .

Définition 3.1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On appelle **ouvert d'annulation de f** , noté $\mathcal{O}(f)$, le plus grand ouvert de \mathbb{R}^n sur lequel $f = 0$ presque partout. Autrement dit, $\mathcal{O}(f)$ est un ensemble ouvert tel que :

$$f = 0 \text{ p.p. sur } \mathcal{O}(f),$$

pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que $f = 0$ p.p. sur U on a $U \subset \mathcal{O}(f)$.

On admet qu'un tel ouvert $\mathcal{O}(f)$ existe et est unique et qu'il peut aussi s'écrire comme l'union des tous les ouverts ω de \mathbb{R}^n tels que $f = 0$ p.p. sur ω , c'est à dire :

$$\mathcal{O}(f) = \cup_{\omega \in \mathcal{A}} \omega$$

où $\mathcal{A} = \{\omega \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^n \text{ tels que } f = 0 \text{ p.p. sur } \omega\}$.

Exemple : $\mathcal{O}(H) =]-\infty, 0[$.

Définition 3.2. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$. On appelle **support de f** (noté $\text{supp}(f)$) la complémentaire sur \mathbb{R}^n de $\mathcal{O}(f)$, donc

$$\text{supp}(f) = \mathbb{R}^n - \mathcal{O}(f).$$

Exemple : $\text{supp}(H) = [0, +\infty[$.

Cas particulier : Si f est une fonction continue on doit, pour la cohérence, retrouver la définition du support donnée en Définition 2.1. En effet on a :

si f est continue alors le support de f est l'adhérence en \mathbb{R}^n de l'ensemble de non-annulation de f .

Preuve : voir cours.

3.1.2 Définition du support d'une distribution

Dans toute la suite du cours, si on a $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec ω et Ω des ensembles ouverts, alors toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ peut être vue comme une fonction appartenant à $\mathcal{D}(\Omega)$ en la prolongeant simplement par 0 sur $\Omega - \omega$.

Définition 3.3. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et Ω ouvert en \mathbb{R}^n . On dit que T est **nulle sur Ω** (on écrit : $T = 0$ sur Ω) si

$$\langle T, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

(on peut écrire de manière équivalente :

$$\langle T, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \text{tel que } \text{supp}(\varphi) \subset \Omega.)$$

La proposition suivante nous dit qu'une fonction est nulle (p.p.) sur un ensemble si et seulement si elle est nulle comme distribution sur cet ensemble :

Proposition 3.4. Soit $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω ouvert. Alors

$$u = 0 \text{ p.p. sur } \Omega \quad \Leftrightarrow \quad T_u = 0 \text{ sur } \Omega.$$

Preuve : voir cours.

Exemple : $T_H = 0$ sur tout Ω ouvert tel que $\Omega \subset]-\infty, 0[$. Dans la suite on généralise aux distributions les notions d'ouvert d'annulation et support.

Définition 3.5. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ une distribution sur \mathbb{R}^n . On appelle **ouvert d'annulation de T** , noté $\mathcal{O}(T)$, le plus grand ouvert de \mathbb{R}^n sur lequel $T = 0$. Autrement dit, $\mathcal{O}(T)$ est un ensemble ouvert tel que :

$$T = 0 \text{ sur } \mathcal{O}(T),$$

pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que $T = 0$ sur U on a $U \subset \mathcal{O}(T)$.

On admet qu'un tel ouvert $\mathcal{O}(T)$ existe et est unique et qu'il peut aussi s'écrire comme l'union des tous les ouverts ω de \mathbb{R}^n tels que $T = 0$ sur ω , c'est à dire :

$$\mathcal{O}(T) = \cup_{\omega \in \mathcal{A}} \omega$$

où $\mathcal{A} = \{\omega \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^n \text{ tels que } T = 0 \text{ sur } \omega\}$.

Définition 3.6. Soit $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On appelle **support de** T la complémentaire sur \mathbb{R}^n de $\mathcal{O}(T)$, donc

$$\text{supp}(T) = \mathbb{R}^n - \mathcal{O}(T).$$

Exemple : Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Alors $\mathcal{O}(\delta_a) = \mathbb{R}^n - \{a\}$. On déduit : $\text{supp}(\delta_a) = \{a\}$.

Preuve : voir cours.

On démontre très facilement (*Exercice*) le résultat suivant :

Proposition 3.7. Soit $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\text{supp}(T_u) = \text{supp}(u).$$

On utilisera dans la suite du cours la notation suivante :

Notation : $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ = l'ensemble des distributions sur \mathbb{R}^n à support **compact**.

Exemples :

$$\delta_a \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$$

$$T_H \notin \mathcal{E}'(\mathbb{R}).$$

3.2 La convolution des distributions

Rappelons d'abord la notion de convolution de deux fonctions :

Définition 3.8. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow C$ deux fonctions. On appelle (quand elle existe) **convolution** de f et g (notée $f * g$) la fonction $f * g : \mathbb{R}^n \rightarrow C$ donnée par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque : Assez souvent la convolution existe uniquement *presque partout sur* \mathbb{R}^n .

Proposition 3.9. L'opération " $*$ " est commutative, c'est à dire :

$$f * g = g * f.$$

Preuve : voir cours.

Le but de ce qui suit est d'étendre la convolution à des distributions. Comme pour les autres opérations, on veut donner un sens à $T * S$, où T et S sont deux distributions sur \mathbb{R}^n . On veut en même temps que si T et S sont des fonctions (donc $T = T_f$ et $S = T_g$ avec $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$) alors la convolution soit la convolution des fonctions comme celle définie en Définition 3.8. On veut donc : $T_f * T_g = T_{f*g}$. On aurait le calcul formel suivant pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ arbitraire :

$$\langle T_f * T_g, \varphi \rangle = \langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\varphi(x) dx dt.$$

Nous faisons le changement de variable $x = y + t$ donc $dx = dy$, ce qui donne

$$\langle T_f * T_g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(t)\varphi(y+t) dy dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(t)\varphi(y+t) dy \right] dt.$$

On peut écrire alors

$$\langle T_f * T_g, \varphi \rangle = \langle T_f, \langle T_g, \varphi(y+t) \rangle \rangle .$$

Il faut comprendre cette relation de la manière suivante : la distribution T_g s'applique à la fonction test qui à tout $t \in \mathbb{R}^n$ associe $\varphi(y+t)$ (y fixé ici). Ensuite $\langle T_g, \varphi(y+t) \rangle$ est une fonction test (dépendant de y) pour la distribution T_f .

On écrit ceci souvent sous la forme

$$\langle T_f * T_g, \varphi \rangle = \langle (T_f)_y, \langle (T_g)_t, \varphi(y+t) \rangle \rangle .$$

où la notation $(T_f)_y$ signifie que la distribution T_f s'applique à une fonction test dépendant de la variable y . On peut montrer facilement qu'on a aussi

$$\langle T_f * T_g, \varphi \rangle = \langle (T_g)_t, \langle (T_f)_y, \varphi(y+t) \rangle \rangle .$$

Nous allons utiliser ces formules comme définition générale de la convolution pour deux distribution.

On a besoin du résultat suivant :

Lemme 3.10. (*Admis!*)

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Alors l'application

$$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \langle (T)_y, \varphi(x+y) \rangle \in C$$

est une fonction appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Si en plus $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ alors cette application est un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

En plus on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle (T)_y, \varphi(x+y) \rangle = \langle (T)_y, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x+y) \rangle .$$

Exemple : Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $T = \delta_a$. Alors l'application

$$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \langle (\delta_a)_y, \varphi(x+y) \rangle = \varphi(x+a) \in C$$

n'est autre que $\tau_{-a}\varphi$ (la translatée de φ par $-a$, vu en TD). On sait que $\tau_{-a}\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Exemple : Soit $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et considérons T_u la distribution régulière associée à u . L'application du Lemme 3.10 devient

$$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \langle (T_u)_y, \varphi(x+y) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi(x+y) dy \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Si en plus le support de u est compact alors cette application est un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 3.11. Soient $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tels qu'au moins l'une des deux distributions est **à support compact** (donc $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ou $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$). On appelle **convolution** de T et S (notée $T * S$) la convolution sur \mathbb{R}^n définie par

$$\begin{cases} \text{Soit } \langle T * S, \varphi \rangle = \langle (S)_x, \langle (T)_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle & \text{si } T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \\ \text{Soit } \langle T * S, \varphi \rangle = \langle (T)_x, \langle (S)_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle & \text{si } S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \end{cases} \quad (3.1)$$

On admet que ces relations définissent dans chaque cas respectif une distribution sur \mathbb{R} et qu'on a aussi (pour la cohérence) :

$$\langle (S)_x, \langle (T)_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle (T)_x, \langle (S)_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle \quad \text{si } T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n).$$

Conséquence : L'opération “*” est **commutative**, c'est à dire

$$T * S = S * T \quad \forall T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ avec } T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \text{ ou } S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n).$$

Exemple fondamental : Si $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp}(f)$ compact ou $\text{supp}(g)$ compact alors

$$T_f * T_g = T_{f*g} \quad \text{avec} \quad (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t) dt.$$

Preuve : reprendre les calculs du début de cette section.

Exemple fondamental : Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ la convolution $T * \delta$ a un sens car $\delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. On a pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle T * \delta, \varphi \rangle = \langle (T)_x, \langle (\delta)_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle (T)_x, \varphi(x) \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

donc

$$T * \delta = \delta * T = T.$$

(δ est l'élément **neutre** pour la convolution des distributions). On verra dans la section suivante que le fait d'avoir un élément neutre pour la convolution est important dans la résolution des équations différentielles en utilisant la convolution. A remarquer qu'un tel élément neutre n'existe pas dans le cadre des fonctions, d'où l'importance d'étendre la convolution à des distributions.

Proposition 3.12. (*Admis !*)

Soient $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tels que $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ou $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Alors

1. Pour tout $i = 1, 2 \dots n$ on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(T * S) = \frac{\partial}{\partial x_i}T * S = T * \frac{\partial}{\partial x_i}S.$$

2. (*Généralisation*) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a

$$D^\alpha(T * S) = D^\alpha T * S = T * D^\alpha S.$$

(donc on dérive la convolution en dérivant l'une des deux distributions)

Exemple : $\delta' * T = (\delta * T)' = T'$ donc $\delta' * T = T'$.

Proposition 3.13. L'opération " $*$ " est **bilinéaire**, c'est à dire : $\forall \beta_1, \beta_2 \in C$ et $\forall T_1, T_2, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tels que les opérations des convolutions suivantes ont un sens, on a

$$(\beta_1 T_1 + \beta_2 T_2) * S = \beta_1 (T_1 * S) + \beta_2 (T_2 * S).$$

3.3 Applications à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants

3.3.1 Généralités

Soit P un **polynôme** de degré au plus $m \in \mathbb{N}$ sur \mathbb{R}^n

$$P(y) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha y^\alpha \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $a_\alpha \in C$, $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n}$.

Au polynôme P on associe un opérateur différentiel linéaire d'ordre au plus m et à coefficients constants, noté $P(D)$, définit par

$$P(D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u. \quad (3.2)$$

Remarque : On peut voir $P(D)$ comme une application de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ à valeurs dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemple : En dimension 1 ($n = 1$) un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants est de la forme

$$P(D)u = a_0 u + a_1 u' + a_2 u'' + \cdots + a_m u^{(m)}.$$

Exemple : L'opérateur de **Laplace** (ou le **laplacien**) donné par

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

est un cas particulier (très étudié !) d'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants, d'ordre 2. Cet opérateur est associé au polynôme

$$P(y) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = |y|^2$$

($|y|$ désigne la norme **euclidienne** du vecteur y).

Dans la suite on va considérer le problème suivant : soit $P(D)$ comme dans (3.2), on se donne $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et on cherche $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant

$$P(D)u = f \quad \text{au sens des distributions} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (3.3)$$

Définition 3.14. On dit que la distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est une **solution fondamentale** de l'opérateur $P(D)$ si E satisfait l'égalité

$$P(D)E = \delta \quad \text{au sens des distributions } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Remarque : En général il n'y a pas d'unicité de la solution fondamentale.

Exemple : Les solutions fondamentales de l'opérateur u' sont $E = H + M$ avec M constantes arbitraires.

Exemple : Les solutions fondamentales de l'opérateur $u' + au$ avec $a \in C$ sont $E(x) = e^{-ax}[H(x) + M]$ avec M constantes arbitraires (*vu en TD*).

Le resultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 3.15. Soit $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ solution fondamentale de $P(D)$ et soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tel qu'au moins l'une des deux distributions E ou f soit à support compact. Alors $u = E * f$ est une solution de (3.3).

Preuve : On a le calcul suivant :

$$P(D)(E * f) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha (E * f) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (D^\alpha E) * f = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha E \right) * f$$

Comme E est solution fondamentale on a

$$P(D)(E * f) = \delta * f = f$$

ce qui montre le résultat.

Remarque : Ce résultat ne permet pas de donner **toutes** les solution de (3.3), il permet seulement d'en construire une solution.

Exemple : On se donne $a \in C$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ avec $supp(f)$ compacte. On se propose de donner une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle ordinaire :

$$u' + au = f. \tag{3.4}$$

Comme $E(x) = e^{-ax}H(x)$ est une solution fondamentale de l'opérateur $u' + au$ alors une solution de (3.4) est donnée par $u = E * f$. Comme E et f sont des fonctions alors u est aussi une fonction donnée par

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} E(x-t)f(t) dt = \int_{-\infty}^x e^{-a(x-t)} f(t) dt$$

(car $H(x-t) = 0$ si $t > x$).

3.3.2 Solution fondamentale du laplacien et applications

Dans la suite on montre comment construire une solution fondamentale du laplacien pour $n = 2$. Donc on cherche $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\Delta E = \delta \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2). \quad (3.5)$$

On cherchera E comme une **fonction** dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Si dans l'égalité précédente on prends des fonctions test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ (c'est à dire des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ à support en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, donc des fonction qui s'annule dans un voisinage de 0) on obtient

$$\langle \Delta E, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 - \{0\}).$$

Il est naturel alors de chercher E comme une fonction **harmonique** sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, c'est à dire, on va chercher $E : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^2 telle que

$$\Delta E = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^2 - \{0\} \quad (3.6)$$

au sense classique.

Remarque : On peut voir une telle fonction E comme étant définie *presque partout* sur \mathbb{R}^2 . Cependant, ell ne doit pas être de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , car alors par continuité elle satisfairait (3.6) sur tout \mathbb{R}^2 au sense classique, donc aussi au sense des distributions et ceci serait en contradiction avec (3.5).

Pour résumer, on veut une fonction $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ et satisfaisant au sense classique (3.6). Bien sur, cela ne donne pas automatiquement (3.5).

On cherchera E comme une fonction **radiale**, c'est à dire dépendant uniquement de la norme euclidienne de la variable x . En utilisant les coordonnées **polaires**

$$x_1 = r \cos \theta \quad x_2 = r \sin \theta$$

avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, cela revient à dire que E est indépendante de θ . Rappelons que $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Dans la suite on passera en coordonnées polaires, mais pour commodité on ne changera pas les noms des fonctions après ce passage. En écrivant (3.6) en coordonnées polaires on a

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.7)$$

On cherche une solution de cette équation sous la forme $E(r, \theta) = \psi(r)$ (fonction radiale). On obtient alors de (3.7) que ψ doit satisfaire :

$$\psi'' + \frac{1}{r} \psi' = 0$$

c'est à dire $r\psi'' + \psi' = 0 \Leftrightarrow (r\psi')' = 0$. En intégrand on trouve $r\psi' = c_1 \Leftrightarrow \psi' = \frac{c_1}{r}$ avec c_1 une constante. En intégrant encore une fois on trouve $\psi(r) = c_1 \log(r) + c_2$ avec c_2 une

constante.

On fait un choix commode : $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. On a donc trouvé que $\hat{E}(x) = \log(|x|)$ satisfait (3.6). Il est facile de voir que $\hat{E} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ (appliquer le **critère de Riemann**). Il reste à calculer le laplacien au sens des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de \hat{E} . Nous avons

Proposition 3.16.

$$\Delta \hat{E} = 2\pi\delta \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2). \quad (3.8)$$

Idée de la preuve : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ arbitraire. On a

$$\langle \Delta \hat{E}, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^2 \langle \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \hat{E}, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^2 \langle \hat{E}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{E} \Delta \varphi \, dx.$$

On démontre ensuite (*preuve plus difficile, voir cours*) que $\int_{\mathbb{R}^2} \hat{E} \Delta \varphi \, dx = 2\pi\varphi(0)$, ce qui donne le résultat.

Conséquence :

$$E_2(x) = \frac{1}{2\pi} \log(|x|)$$

est une solution fondamentale du laplacien en dimension 2. (la notation E_2 vient du fait que $n = 2$).

On obtient de manière similaire en dimension 3 (*sans démonstration*) :

$$E_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$$

est une solution fondamentale du laplacien en dimension 3.

Plus généralement pour tout $n \geq 3$ on a

$$E_n(x) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} |x|^{2-n}$$

est une solution fondamentale du laplacien en dimension n , où ω_n désigne le volume de la boule unité en dimension n ($\omega_n = \lambda_n(B_n(0, 1))$). On remarque que $\omega_3 = \frac{4\pi}{3}$ donc pour $n = 3$ on retrouve la formule pour E_3 .

Application : On considère $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$ et supposons que le support de f est compact. Alors une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ du problème

$$\Delta u = f$$

est donnée par

$$u = E_n * f.$$

Donc u est une fonction donnée par

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log(|x-y|) f(y) \, dy \quad \text{pour } n = 2$$

et respectivement

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(y)}{|x-y|} dy \quad \text{pour } n = 3.$$

Ces deux expressions s'appellent **potentiel de volume**. Dans la physique, l'expression pour $n = 3$ représente (à une constante multiplicative près) le potentiel électrique créé par un charge électrique de densité f .

Bibliographie

- [1] C. Gasquet, P. Witomski, *Analyse de Fourier et applications. Filtrage, calcul numérique, ondelettes*, Collection Science Sup, 2004.
- [2] R. Dalmaso, P. Witomski, *Analyse de Fourier et applications. Exercices corrigés*, Collection Science Sup, 2000.
- [3] N. Boccara, *Distributions*, Collection Mathématiques pour l'ingénieur, 1997.
- [4] F. Demengel, G. Demengel, *Mesure et distributions, théorie et illustrations par les exemples*, Ellipses, 2001.