Polytech Lyon, MAM3A, 2017-2018

Analyse Numérique (AN)

Partiel 1 - octobre 2017

Durée 1h et 10min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

Soit $\Omega =]a, b[$ un ouvert borné dans $\mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ des constantes. On se donne aussi une fonction $f \in C(\bar{\Omega})$.
On considère l'q̂uation différentielle avec conditions aux limites du type mixte suivante: trouver $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ satisfaisant

$$-u''(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \Omega \tag{1}$$

et

$$\begin{cases} u(a) &= \alpha \\ u'(b) &= \beta \end{cases} \tag{2}$$

Dans la suite de l'exercice on va utiliser la méthode et les notations du cours pour construire une approximation du problème (1) - (2). On fixe $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 3$, on pose $h = \frac{b-a}{N+1}$, on pose $x_i = a + ih$ pour tout $i \in \{0, 1, \cdots N+1\}$ et on note par U_i une approximation de $u(x_i)$.
Pour tout $i = 1, 2, \cdots N$ on approche $u''(x_i)$ en (1) par $\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}$. On approche ensuite $U(a)$ par U_0 et $U'(b)$ par $\frac{U_{N+1} - U_N}{h}$, donc les approximations des conditions limite seront

$$U_0 = \alpha \tag{3}$$

et

$$\frac{U_{N+1} - U_N}{h} = \beta. \tag{4}$$

a) Ecrire un système algébrique linéaire d'inconnues $U_1, U_2, \cdots U_N$ qui approche le problème (1) - (2). Ecrire ce système sous la forme matricielle $AU = b$ avec $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^N$ à préciser.
b) Montrer que A est une matrice symétrique et défine positive.

Exercice 2.

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

a) Soit $b \in \mathbb{R}^3$ donné par $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Utiliser l'algorithme de Gauss pour résoudre le système algébrique linéaire $Ax = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Montrer qu'il existe la décomposition $A = LU$ où $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure avec 1 sur la diagonale et $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure. Trouver L et U.

Exercice 3.
On se donne $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et les nombres complexes $a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que chaque ligne de A (à partir de la deuxième ligne) s'obtient de la ligne précédente par permutations circulaires vers la droite. Une telle matrice s'appelle **matrice circulante**.
Pour tout nombre complexe z nous notons par V_z le vecteur colonne de $\mathbb{C}^n$ donné par $V_z = (1, z, z^2, \cdots z^{n-1})^T$.
Nous notons par U_n l'ensemble des racines complexes de l'unité

$$U_n = \{\omega \in \mathbb{C}, \quad \omega^n = 1\}.$$

Rappelons que U_n contient exactement n éléments et plus précisément on a

$$U_n = \{e^{2\pi ki/n}, \quad k = 0, 1, \cdots n-1\}.$$

a) Montrer que pour tout $\omega \in U_n$ le vecteur V_ω est un vecteur propre de la matrice A. Quelle est la valeur propre correspondante à ce vecteur propre?
b) Application: donner une valeur propre complexe non réelle et un vecteur propre associée à cette valeur propre, pour la matrice circulante suivante

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$