Polytech Lyon, MAM3A, 2017-2018

Analyse Numérique (AN)

Partiel 2 - novembre 2017

Durée 1h et 10min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

Partie I)

Déterminer les valeurs propres d'une matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Partie II)

IIa) On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & b & b & b \\ b & 3 & b & b \\ b & b & 3 & b \\ b & b & b & 3 \end{pmatrix}$$

avec $b \in \mathbb{R}$.

Déterminer les valeurs propres de A.

Pour quelles valeurs de b la matrice A est-elle symétrique définie positive?

IIb) Ecrire la matrice J de l'itération de Jacobi pour résoudre le système algébrique linéaire $Ax = c$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^4$ avec $c \in \mathbb{R}^4$ donné.

Pour quelles valeurs de b la méthode de Jacobi converge-t-elle?

Exercice 2.

Soit $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = e^{3x}, \quad \forall\, x \in [0, 2].$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ on considère la division suivante sur $[0, 2]$: on pose $h = \frac{2}{n}$ et ensuite $x_i = ih,\ i \in [[0, n]]$.

On considère alors P_n le polynome d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, x_1, \cdots x_n$.

a) Construire P_2 en utilisant les polynomes fondamentaux de Lagrange aux points 0, 1 et 2.

b) On pose $E_n(x) = P_n(x) - f(x)$ (l'erreur d'interpolation). Montrer qu'on a

$$\sup_{x \in [0,2]} |E_n(x)| \ \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to +\infty.$$

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

Rappelons qu'un matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite "à diagonale strictement dominante" si

$$|U_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |U_{ij}|, \quad \forall\, i \in [[1,n]].$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale strictement dominante. Rappelons la méthode itérative de **relaxation** pour résoudre un système algèbrique linéaire de matrice A; on considère la décomposition standard vue en cours:
$A = D - E - F$ on pose $M = \frac{1}{\omega}D - E$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$ et la matrice de relaxation sera $B = M^{-1}N$. On suppose ici $\omega \in]0,1]$ et on se propose de montrer que la méthode itérative de relaxation converge dans ce cas.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre arbitraire de B.

a) Montrer que la matrice $\frac{\lambda+\omega-1}{\omega}D - \lambda E - F$ n'est pas inversible.

b) Montrer qu'il existe $i \in [[1,n]]$ tel que

$$\Big|\frac{\lambda+\omega-1}{\omega}\,A_{ii}\Big| \leq |\lambda| \sum_{j<i} |A_{ij}| + \sum_{j>i} |A_{ij}|.$$

c) Montrer que $\rho(B) < 1$.