

Corrigé Partiel 1 AN 2024-2025

Exo 1.

a) Pour (2) on a

$$\frac{U_1 - U_0}{h} = \alpha U_0 \quad \text{c'est à dire}$$

$$U_1 - U_0 = \alpha h U_0 \quad \text{donc}$$

$$(1 + \alpha h) U_0 = U_1 \quad ; \quad \text{comme } 1 + \alpha h > 0 \quad \text{on a}$$

$$(*)1) \quad U_0 = \frac{1}{1 + \alpha h} U_1$$

De même pour (3) :

$$\frac{U_{N+1} - U_N}{h} = -\alpha U_{N+1} \quad \text{c'est à dire}$$

$$U_{N+1} - U_N = -\alpha h U_{N+1} \quad \text{donc}$$

$$(1 + \alpha h) U_{N+1} = U_N \quad ; \quad \text{comme } 1 + \alpha h > 0 \quad \text{on a}$$

$$(*)2) \quad U_{N+1} = \frac{1}{1 + \alpha h} U_N$$

b) On a

$$-\frac{U_{i-1} + 2U_i + U_{i+1}}{h^2} = f(x_i) \quad , \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

donc

$$-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1} = \underbrace{h^2 f(x_i)}_{\text{notés } b_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

Pour $i = 0$ on utilise $(*)1)$ qui donne U_0 en fonction de U_1 .De même pour $i = N$ on utilise $(*)2)$ qui donne U_{N+1} en fonction de U_N . On obtient

$$-\frac{1}{1 + \alpha h} U_1 + 2U_1 - U_2 = b_1$$

$$-U_1 + 2U_2 - U_3 = b_2$$

⋮

$$-U_{N-2} + 2U_{N-1} - U_N = b_{N-1}$$

$$-U_{N-1} + 2U_N - \frac{1}{1 + \alpha h} U_N = b_N$$

On a aussi

$$-\frac{1}{1+\alpha h} U_1 + 2U_1 = \left(2 - \frac{1}{1+\alpha h}\right) U_1 = \frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} U_1$$

et aussi

$$2U_N - \frac{1}{1+\alpha h} U_N = \frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} U_N$$

Alors la première équation du système s'écrit

$$\frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} U_1 - U_2 = b_1$$

et la dernière équation du système s'écrit

$$-U_{N-1} + \frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} U_N = b_N$$

En posant $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$

alors le système s'écrit

$$AU = b \quad \text{avec}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} \end{pmatrix}$$

c) ~~Il est évident que A est symétrique~~ $A_{11} = A_{NN} = \frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h}$
~~Soit $x \in \mathbb{R}^N$ arbitraire. On a $\frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} > 1 \Leftrightarrow 1+2\alpha h > 1+\alpha h \Leftrightarrow 2\alpha h > \alpha h$ vrai!~~

d) Soit $x \in \mathbb{R}^N$ arbitraire; alors

$$\langle Ax, x \rangle = \frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 2x_2 x_3$$

$$+ 2x_3^2 - \dots - 2x_{N-2} x_{N-1} + 2x_{N-1}^2 - 2x_{N-1} x_N +$$

$$+ \frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} x_N^2$$

Alors car A est symétrique

On observe que

$$\frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} = \frac{1+\alpha h + \alpha h}{1+\alpha h} = 1 + \frac{\alpha h}{1+\alpha h}$$

Alors

Alors

$$\begin{aligned} \langle A x, x \rangle &= \frac{\alpha h}{1+\alpha h} x_1^2 + x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2 x_3 + x_3^2 + x_3^2 - 2x_3 x_4 + x_4^2 + \\ &+ \dots + x_{N-2}^2 - 2x_{N-2} x_{N-1} + x_{N-1}^2 + x_{N-1}^2 - 2x_{N-1} x_N + x_N^2 + \frac{\alpha h}{1+\alpha h} x_N^2 = \\ &= \frac{\alpha h}{1+\alpha h} (x_1^2 + x_N^2) + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{N-1} - x_N)^2 \end{aligned}$$

On observe que

$$\langle A x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

D'autre part si $\langle A x, x \rangle = 0$ alors

$$\begin{cases} x_1 = x_N = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_{N-1} - x_N = 0 \end{cases}$$

ce qui donne
 $x = 0$.

Donc A est définie positive

Exercice 2

a) $\|A\|_\infty = \max \{ 2+1, 1+2+1, 1+2 \} = 4$
 On pose $i_0 = 2$ (car $\max_{i=1,2,3} \sum_{j=1}^3 |A_{ij}| = \sum_{j=1}^3 |A_{2j}|$, voir TD3)
 prenons $x = \left(\frac{\bar{A}_{21}}{|A_{21}|}, \frac{\bar{A}_{22}}{|A_{22}|}, \frac{\bar{A}_{23}}{|A_{23}|} \right)^T = \left(\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 En effet $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\|A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\|_\infty = 4 = \|A\|_\infty$ et $\|x\|_1 = 1$

b) $\|A\|_1 = \max \{ 2+1, 1+2+1, 1+2 \} = 4$
 On pose $j_0 = 2$ (car $\max_{j=1,2,3} \sum_{i=1}^3 |A_{ij}| = \sum_{i=1}^3 |A_{i2}|$, voir TD3)
 Prenons $x = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. En effet $A e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\|A e_2\|_1 = 4 = \|A\|_1$ et $\|e_2\|_1 = 1$.

c) $\|A\|_2 = \rho(A)$ car A est hermitienne (~~réelle~~ et ici réelle et symétrique)

Alors il faut calculer les valeurs propres de A .

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1-(\lambda-2)^2 & \lambda-2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \quad \text{développer colonne 1} \\ &= -\det \begin{pmatrix} -\lambda^2+4\lambda-3 & \lambda-2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-2) \det \begin{pmatrix} -\lambda^2+4\lambda-3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Alors } P_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Une racine évidente de P_A est $\lambda=2$.

les racines de

$$\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \quad \text{sont}$$

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$$

Donc $\text{Sp}(A) = \{2 - \sqrt{2}, 2, 2 + \sqrt{2}\}$

Alors $\rho(A) = 2 + \sqrt{2} = \|A\|_2$.

Exercice 3.

a) Montrons $\ker(I_n + B) = \{0\}$.
~~Soit $x \in \mathbb{K}^n$ avec~~ On suppose par absurd
 qu'il existe $x \in \mathbb{K}^n$ avec $x \neq 0$ tel que
 $(I_n + B)x = 0$. Alors
 $x + Bx = 0$ donc

$$x = -Bx.$$

On applique la norme 1.4

$$\|x\| = \|-Bx\| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

$$\|x\| = \| -Bx \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$