Polytech Lyon, MAM3A, 2024-2025

Analyse Numérique (AN)

Partiel 1

Durée 1h30 - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

Soit $\Omega =]a, b[$ un ouvert borné dans $\mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. On se donne aussi une fonction $f \in C(\bar{\Omega})$ et une constante $\alpha > 0$.

On considère l'q́uation différentielle suivante: trouver $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ satisfaisant

$$-u''(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \Omega \tag{1}$$

avec les conditions aux limites du type Robin suivantes:

$$u'(a) = \alpha u(a) \tag{2}$$

et

$$u'(b) = -\alpha u(b). \tag{3}$$

Dans la suite de l'exercice on va utiliser la méthode et les notations du cours pour construire une approximation du problème (1) - (2) - (3). On fixe $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 3$ assez grand, on pose $h = \frac{b-a}{N+1}$, on pose $x_i = a + ih$ pour tout $i \in \{0, 1, \cdots N+1\}$ et on note par U_i une approximation de $u(x_i)$.

Pour tout $i = 1, 2, \cdots N$ on approche $u''(x_i)$ en (1) par $\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}$. On approche ensuite $u'(a)$ en (2) par $\frac{U_1 - U_0}{h}$ et $u'(b)$ en (3) par $\frac{U_{N+1} - U_N}{h}$.

a) Ecrire une approximation de (2) comme une équation faisant intervenir U_0 et U_1. De même, écrire une approximation de (3) comme une équation faisant intervenir U_N et U_{N+1}. Montrer qu'on peut exprimer U_0 en fonction de U_1 et respectivement U_{N+1} en fonction de U_N.

b) Ecrire un système algébrique linéaire d'inconnues $U_1, U_2, \cdots U_N$ qui approche le problème (1) - (2) - (3). Ecrire ce système sous la forme matricielle $AU = b$ avec $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^N$ à préciser, où la matrice A doit être telle que $A_{22} = 2$.

c) Montrer que $A_{11} = A_{NN} > 1$.

d) Montrer que A est une matrice symétrique et définie positive (matrice SDP).

Exercice 2.

On considère la matrice réelle $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calculer la norme subordonnée $\|A\|_\infty$ de A. Trouver un vecteur $x \in \mathbb{C}^3$ avec $\|x\|_\infty = 1$ tel que $\|Ax\|_\infty = \|A\|_\infty$.

a) Calculer la norme subordonnée $\|A\|_1$ de A. Trouver un vecteur $x \in \mathbb{C}^3$ avec $\|x\|_1 = 1$ tel que $\|Ax\|_1 = \|A\|_1$.

c) Calculer la norme subordonnée $\|A\|_2$ de A.

Indication: utiliser le fait que A est symétrique.

Exercice 3.

Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{C}^n$ et notons encore par $\|\cdot\|$ la norme matricielle subordonnée à cette norme vectorielle.

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée satisfaisant

$$\|B\| < 1.$$

a) Montrer que la matrice $I_n + B$ est inversible.
b) Montrer qu'on a

$$\|(I_n + B)^{-1}\| \ \leq \ \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

Indication: partir de l'égalité $(I_n + B)(I_n + B)^{-1} = I_n$.