

Corrigé partiel 2 (AM) 2025-2026

a) On pose $S^{(1)} = S = (A \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
matrice du système

Etape 1.

On pose $d_1^{(1)} = \frac{2}{1} = 2$; $d_2^{(1)} = \frac{3}{1} = 3$

On obtient de $S^{(1)}$ la matrice $S^{(2)}$ avec 0 sur la première colonne sous la diagonale

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 3L_1 \end{aligned}$$

Alors

$$S^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Etape 2 faire 0 sur la 2^{ème} colonne en dessous de la diagonale

$$d_1^{(2)} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$$

Ceci donne

$$S^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 28 & 7 \end{pmatrix} = (A^{(3)} \ b^{(3)}) \text{ avec}$$

~~Alors le système~~

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix} ; \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Alors le système du départ $Ax = b$ est équivalent au système $A^{(3)}x = b^{(3)}$ ($A^{(3)}$ est triangulaire supérieur)

On doit résoudre donc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_2 - 7x_3 = -2 \\ 28x_3 = 7 \end{cases}$$

On résout par une remontée

$$\begin{cases} x_3 = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} \\ x_2 = 2 - 7x_3 = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4} \\ x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 - \frac{2}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Donc

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) Conformément à la théorie vue en cours, la décomposition $A = LU$ existe parce que dans l'algorithme de Gauss on n'a pas eu besoin d'intervenir des lignes : en plus on a

$$A = LU \text{ avec } U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1^{(1)} & 1 & 0 \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

a) $f(x) = \frac{1}{2x+10}$

$$y_0 = -2, y_1 = -1, y_2 = 0$$

Soit P_2 le polynôme d'interpolation de f aux points y_0, y_1, y_2 . $P_2 \in \mathcal{P}_2$

On peut utiliser la méthode de Newton :

$$P_2(x) = f(y_0) + f(y_0, y_1)(x - y_0) + f(y_0, y_1, y_2)(x - y_0)(x - y_1)$$

$$f(y_0, y_1) = \frac{f(y_1) - f(y_0)}{y_1 - y_0} = \frac{1}{1} \left| \frac{1}{2(-1)+10} - \frac{1}{2(-2)+10} \right| = \frac{1}{8} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{24}$$

$$f(y_1, y_2) = \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{1}{1} \left| \frac{1}{2 \cdot 0 + 10} - \frac{1}{2 \cdot (-1) + 10} \right| = \frac{1}{10} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{40}$$

$$f(y_0, y_1, y_2) = \frac{f(y_1, y_2) - f(y_0, y_1)}{y_2 - y_0} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{40} + \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{120}$$

$$\text{Alors } P_2(x) = \frac{1}{(-2)} \frac{1}{2(-2)+10} - \frac{1}{24}(x - (-2)) + \frac{1}{120}(x - (-2))(x - (-1))$$

donc

$$P_2(x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{24}(x+2) + \frac{1}{120}(x+2)(x+1)$$

b) b1) ~~Pour $k=1$ on~~ i) Initialisation :

Montrons que l'égalité est vraie pour $k=1$

$$f'(x) = -\frac{1}{(2x+10)^2} \cdot 2 = \frac{-2}{(2x+10)^2}$$

et $\frac{(-2)^k k!}{(2x+d)^{k+1}}$ pour $k=0$ est $\frac{(-2)^1 \cdot 1}{(2x+d)^2} = \frac{-2}{(2x+d)^2}$ donc OK!

ii) Heredite

On suppose que l'égalité est vraie pour k et il faut la montrer pour $k+1$

On a donc $f^{(k)}(x) = \frac{(-2)^k k!}{(2x+d)^{k+1}}$, $\forall x \in [-2, 0]$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)}(x) = \frac{(-2)^k k!}{(2x+d)^{k+1}}$

Alors $f^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) = \frac{(-2)^k k!}{(2x+d)^{k+1}} \cdot (-2) \cdot (k+1)$

$\cdot (2x+d)^{-(k+2)} \cdot 2$ donc

$$f^{(k+1)}(x) = (-2)^{k+1} \frac{(k+1)!}{(2x+d)^{k+2}}$$

donc vraie pour $k+1$

Ceci montre le résultat

b2) Prendre $k=n+1$ en b1):

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{|(-2)^{n+1}| (n+1)!}{|2x+d|^{n+2}}, \quad \forall x \in [-2, 0]$$

Comme $d > 8$ alors $2x+d > 2x+8 \geq 2(-2)+8 = 4 > 0$
(car $x \geq -2$)

Alors $|2x+d| = 2x+d \geq 2(-2)+d = d-4 > 0$ ce qui

$$\text{donc } \frac{1}{|2x+d|^{n+2}} \leq \frac{1}{(d-4)^{n+2}}$$

$$\text{Nous avons alors } |f^{(n+1)}(x)| \leq \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(d-4)^{n+2}}$$

$\forall x \in [-2, 0]$

En passant au "sup" nous avons le résultat

b3) Nous avons

$$|x - x_j| \leq 2$$

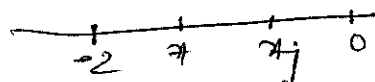
~~$\forall x \in [-2, 0]$~~
 $\forall x, x_j \in [-2, 0]$

$$(\text{car } -2 \leq x \leq 0$$

$$-2 \leq x_j \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x_j \leq 2$$

$$-2 \leq x - x_j \leq 2 \text{ donc } |x - x_j| \leq 2$$

On fait la somme



(en fait on voit graphiquement que la distance entre x et x_j est inférieure ou égale à la distance entre -2 et 0)

$$|x - x_j| \leq 2 \quad \forall j = 0 \dots n$$

En faisant le produit en j on a

$$\prod_{j=0}^n |x - x_j| \leq \prod_{j=0}^n 2 = 2^{n+1}$$

$$\text{donc } \prod_{j=0}^n |x - x_j| \leq 2^{n+1} \quad \forall x \in (-2, 0) \quad \forall j = 0 \dots n$$

b4) Par un résultat de cours on a

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right| \quad \forall x \in (-2, 0)$$

avec $M_{n+1} = \sup_{x \in (-2, 0)} |f^{(n+1)}(x)|$

Par b2) on a

$$M_{n+1} \leq \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(x-4)^{n+2}}$$

et par b3) on a

$$\left| \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right| \leq 2^{n+1}$$

On obtient alors

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(x-4)^{n+2}} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot 2^{n+1} \text{ donc}$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{4^{n+1}}{(x-4)^{n+2}} = \frac{1}{4} \frac{4^{n+2}}{(x-4)^{n+2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{x-4} \right)^{n+2} \quad \forall x \in (-2, 0)$$

On passe au "sup" en x donc

(1)' $\epsilon_n \leq \frac{1}{4} \left(\frac{4}{x-4} \right)^{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Comme $x > 8$ alors $x-4 > 4$ donc $0 < \frac{4}{x-4} < 1$

Alors $\frac{1}{4} \left(\frac{4}{x-4} \right)^{n+2} \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$

ce qui donne $\epsilon_n \rightarrow 0$ car $\epsilon_n > 0$

Exercice 3

a) On a: $Gv = \lambda v$ donc

$$(D-E)^{-1} F v = \lambda v$$

On multiplie à gauche par $D-E$ ce qui donne
 $Fv = \lambda(D-E)v$ (λ est scalaire)

b) On prend la p -ème égalité de (2):
 $\lambda \left(\sum_{j=1}^p A_{ij} v_j \right) = \sum_{j=p+1}^n A_{ij} v_j$ ce qui donne

On passe au mod

$$\lambda \left(\sum_{j=1}^p A_{ij} v_j \right) = \sum_{j=p+1}^n A_{ij} v_j + \sum_{j=1}^p A_{ij} v_j$$

On passe au module et on utilise l'inégalité triangulaire:

$$|\lambda| |A_{pp}| |v_p| \leq |\lambda| \sum_{j=1}^p |A_{ij}| |v_j| + \sum_{j=p+1}^n |A_{ij}| |v_j|$$

On utilise le fait que $\sum_{j=p+1}^n |A_{ij}| |v_j| \leq |\lambda| \sum_{j=p+1}^n |A_{ij}| |v_j|$ car $|\lambda| \geq 1$

Alors

$$|\lambda| |A_{pp}| |v_p| \leq |\lambda| \left(\sum_{j \neq p} |A_{ij}| |v_j| \right)$$

On simplifie par $|\lambda| > 0$ et on a le résultat.

c) On utilise en (3) le fait que $|v_j| \leq |v_p|$, $\forall j \neq p$

donc $|v_p| |A_{pp}| \leq |v_p| \sum_{j \neq p} |A_{pj}|$

On simplifie par $|v_p| > 0$ et on a le résultat.

Si $p=1$ ce résultat est en contradiction avec l'exercice.

La deuxième hypothèse de l'exercice.

Donc dans la suite $p \geq 2$

d) (le résultat de c) ainsi que la première hypothèse de l'exo nous donne $|A_{pp}| = \sum_{j \neq p} |A_{pj}|$

De la troisième hypothèse de l'exercice on déduit qu'il existe $j_1 \in \{1, n\}$, $j_1 \neq p$ tel que $|A_{pj_1}| > 0$

Montrons que $|v_{j_1}| = |v_p|$

Supposons par absurd $|v_{j_1}| \neq |v_p|$

Comme $|v_{j_1}| \leq |v_p|$ ceci implique

$$|v_{j_1}| < |v_p|$$

On utilise ceci en (3):

$$|A_{pp}|/|v_p| \leq \underbrace{\frac{|A_{pj_1}|}{>0} \frac{|v_{j_1}|}{<|v_p|}}_{<|A_{pj_1}|/|v_p|} + \sum_{j \neq p, j \neq j_1} |A_{pj}| \underbrace{\frac{|v_j|}{\leq |v_p|}}_{\leq |v_p|}$$

Alors

$$|A_{pp}|/|v_p| < |v_p| \left(\sum_{j \neq p} |A_{pj}| \right)$$

On simplifie par $|v_p| > 0$ ce qui donne

$$|A_{pp}| < \sum_{j \neq p} |A_{pj}| \quad \text{ce qui contredit l'hypothèse 1 de l'exo.}$$

c) On peut alors refaire les mêmes estimations avec j_1 à la place de p .

si $j_1 = 1$ alors c'est fini, on arrive à une contradiction comme pour le cas $p=1$.

si $j_1 > 2$ alors par le même raisonnement on montre

qu'il existe $j_2 \in \{1, n\}$ avec $j_2 < j_1$ t.p.

$$|v_{j_2}| = |v_{j_1}| = |v_p|$$

On construit ainsi une suite $\bullet$ strictement décroissante

$$p > j_1 > j_2 > j_3 > \dots$$

Il y aura un $j_\ell = 1$

donc ~~$|A_{11}|$~~ comme en c) on aura

$$|A_{11}| \leq \sum_{j=2}^n |A_{1j}|$$

et avec $|v_{j_\ell}|$ donc $|v_1| = 1$

ce qui contredit l'hypothèse 2 de l'exo.