

-1-

Corrigé Partiel 3 (AM) 2025-2026

Exo 1.

a) On cherche $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} I(1) = I_2(1) \\ I(x) = I_2(x) \\ I(x^2) = I_2(x^2) \end{cases}$$

ce qui donne

$$\int_{-1}^1 1 dx = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2$$

$$\int_{-1}^1 x dx = \mu_0 \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \mu_1 \cdot 0 + \mu_2 \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \mu_0 \left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 + \mu_1 \cdot 0 + \mu_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} \text{i)} & \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 2 \\ \text{ii)} & -\sqrt{\frac{3}{5}}\mu_0 + \sqrt{\frac{3}{5}}\mu_2 = 0 \quad \left(\text{car } \int_{-1}^1 x dx = 0\right) \\ \text{iii)} & \frac{3}{5}\mu_0 + \frac{3}{5}\mu_2 = \frac{2}{3} \quad \left(\text{car } \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

l'équation ii) nous donne

$$\mu_2 = \mu_0$$

On remplace en (iii) $\Rightarrow$

$$2 \cdot \frac{3}{5}\mu_0 = \frac{2}{3} \quad \text{ce qui donne}$$

$$\mu_0 = \frac{5}{9}$$

$$\text{On a ensuite } \mu_2 = \mu_0 = \frac{5}{9}$$

Finalement de i) $\Rightarrow$

$$\mu_1 = 2 - \mu_0 - \mu_2 = 2 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\text{Donc } \mu_0 = \frac{5}{9}, \mu_1 = \frac{8}{9}, \mu_2 = \frac{5}{9}$$

b) Nous avons donc

$$I_2(f) = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Pour $f(x) = x^3$

$$I_2(f) = -\frac{5}{9} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 + 0 + \frac{5}{9} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 = 0$$

$$I(f) = \int_{-1}^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

done orde ≥ 3

Pour $f(x) = x^4$

$$I_2(f) = \frac{5}{9} \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 + \frac{8}{9} \cdot 0 + \frac{5}{9} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 =$$

$$= \frac{5}{9} \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{5}{9} \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 2 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{9}{25} = \frac{2}{5}$$

$$I(f) = \int_{-1}^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

done orde ≥ 4

Pour $f(x) = x^5$

$$I_2(f) = -\frac{5}{9} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 + 0 + \frac{5}{9} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 = 0$$

$$I(f) = \int_{-1}^1 x^5 dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_{-1}^1 = 0$$

done orde ≥ 5

Pour $f(x) = x^6$

$$I_2(f) = \frac{5}{9} \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6 + 0 + \frac{5}{9} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6 =$$

$$= 2 \cdot \frac{5}{9} \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3^3}{9 \cdot 5^3} = \frac{6}{25}$$

$$I(f) = \int_{-1}^1 x^6 dx = \left[\frac{x^7}{7}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{7}$$

$$\frac{6}{25} \neq \frac{2}{7}$$

done orde $= 5$.

~~Exercice~~ Exercice 2

a) $\alpha = 1$ $\begin{cases} y' = y + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ équation ~~linéaire~~ différentielle ordinaire linéaire

On applique la formule de Duhamel.

$$y(t) = e^{1 \cdot (t-0)} + \int_0^t e^{(t-s)} 1 ds$$

$$y(t) = e^t + e^t \int_0^t e^{-s} ds = e^t \left[-e^{-s} \right]_0^t = -e^{-t} + 1$$

Alors $y(t) = e^t + e^t(-e^{-t} + 1) = e^t - 1 + e^t = 2e^t - 1$
 $y(t) = 2e^t - 1, \forall t \in \mathbb{R}$ solution globale

b) $\alpha = 2$ $\begin{cases} y' = y^2 + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ équation non linéaire à variables séparées

L'équation s'écrit sous la forme $y' = \alpha(t) \beta(y)$ avec $\alpha(t) = 1$ constant
 $\beta(x) = x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On cherche d'abord les racines de β
 $x^2 + 1 = 0$: pas des racines réelles
 $M = \emptyset$.

On divise par $y^2 + 1$

$$\frac{y'}{y^2 + 1} = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{d}{dt} \arctan y = \frac{d}{dt} t$$

(car une primitive de $x \rightarrow \frac{1}{x^2 + 1}$ est $\arctan(x)$)

$$\Rightarrow \arctan(y(t)) = t + c \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \tan(t + c) \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ constant}$$

On utilise $y(0) = 1 \Rightarrow$

$$1 = \tan(0 + c) \Rightarrow \tan c = 1$$

Il y a une infinité de possibilités

$$c = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

La fonction $x \rightarrow \tan x$ est périodique de période π et elle n'est pas définie en $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

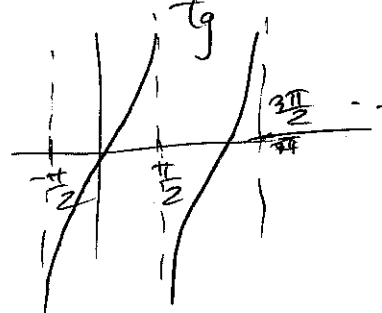
Alors $y(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$
(indépendante de k)

② ~~La fonction~~
Il faut

$$-\frac{\pi}{2} < t + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \quad (\Rightarrow)$$

$$-\frac{3\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$$

y est définie sur $J =]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$



Exo 3.

a) $\textcircled{P}$ On calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$
(car $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow 0$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - ax + x\varepsilon(x)) = 1$$

Alors $f'(0) = 1$

b) Nous avons

$$x_1 = f(x_0) \text{ donc}$$

$$x_1 = x_0 - ax_0^2 + x_0^2 \varepsilon(x_0)$$

En général ~~par~~ pour $x_k \in \mathbb{R}$ donné on a

$$x_{k+1} = f(x_k) \text{ donc}$$

$$x_{k+1} = x_k - ax_k^2 + x_k^2 \varepsilon(x_k)$$

On veut d'abord prendre $h > 0$ tel que si $x_k \in]0, h[$ alors $x_{k+1} \in]0, h[$

~~On suppose donc~~

Comment prendre $h > 0$?

$$\text{Alors } x_{k+1} = x_k (1 - ax_k + x_k \varepsilon(x_k))$$

On veut d'abord $1 - ax_k + x_k \varepsilon(x_k) > 0$

On considère la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$y \rightarrow g_1(y) = 1 - ay + y\varepsilon(y)$$

Comme $\lim_{y \rightarrow 0} g_1(y) = 1$ alors

$\exists h_1 > 0$ tel que

$$g_1(y) > 0, \quad \forall y \in]0, h_1[$$

Alors: si $0 < x_k < h_1$ alors

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{>0} (1 - ax_k + x_k \varepsilon(x_k)) = g_1(x_k) > 0$$

D'autre part, on observe: pose

$$g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \rightarrow g_2(y) =$$

$$x_{k+1} = x_k - ax_k^2 + x_k^2 \varepsilon(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + x_k^2(-a + \varepsilon(x_k))$$

$$\text{Nous avons } \lim_{y \rightarrow 0} (-a + \varepsilon(y)) = -a < 0$$

$$\text{donc } \exists h_2 > 0 \text{ tel que } -a + \varepsilon(y) < 0, \quad \forall y \in]0, h_2[$$

Alors: si $0 < x_k < h_2$ alors

$$x_{k+1} = x_k + \frac{x_k^2}{>0} (-a + \varepsilon(x_k)) < x_k$$

$$\text{Mais comme } x_k < h_2 \Rightarrow x_{k+1} < h_2.$$

Alors on pose $h = \min\{h_1, h_2\} > 0$ et on a:

Si $0 < x_k < h$ alors

$$0 < x_{k+1} < h \text{ et } x_{k+1} < x_k$$

~~preuve par récurrence~~
Ceci montre (b1) par récurrence

En plus $x_{k+1} < x_k$ donc suite strict. décroissante
donc b2)

b3) x_k bornée (car $0 < x_k < h$) et $x_k \rightarrow$

$\Rightarrow x_k$ convergent: $\Rightarrow \exists l \in]0, h[$ tel que
 $x_k \rightarrow l$. On passe à la limite dans

$$l'egalite \quad x_{k+1} = x_k - ax_k^2 + x_k^2 \varepsilon(x_k) \Rightarrow l = l - al^2 + l^2 \varepsilon(l) \Rightarrow l^2(-a + \varepsilon(l)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} l=0 \\ \text{ou} \\ -a + \varepsilon(l) = 0 \end{cases}$$

Mais $-a + \varepsilon(l) = 0$ impossible car $-a + \varepsilon(y) < 0$ si $y < h_2 \leq h$
et $l < h$. Donc $l = 0$