

Partiel 2 Analyse Numérique (AN)*Durée 1h et 30min - Calculatrices interdites, une page de notes manuscrites autorisée***Exercice 1.**

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Soit $b \in \mathbb{R}^3$ donné par $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Utiliser l'algorithme de Gauss pour résoudre le système algébrique

linéaire $Ax = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Montrer qu'il existe la décomposition $A = LU$ où $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure avec 1 sur la diagonale et $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure. Trouver L et U .

Exercice 2.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 4$ et $f : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2x + \alpha}, \quad \forall x \in [-2, 0].$$

a) On suppose ici $\alpha = 10$; construire le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $y_0 = -2$, $y_1 = -1$ et $y_2 = 0$.

b) Nous supposons dans la suite de l'exercice que $\alpha > 8$. On considère $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $x_0, x_1, \dots, x_n$ une division équidistante de l'intervalle $[-2, 0]$, c'est à dire on pose $h = \frac{2}{n}$ et

$$x_j = -2 + jh, \quad \forall j \in [[0, n]].$$

On considère P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$.

On appelle **erreur d'interpolation** de P_n pour f le nombre e_n positif défini par

$$e_n = \sup_{x \in [-2, 0]} |f(x) - P_n(x)|.$$

On se propose de montrer la convergence uniforme de P_n vers f , c'est à dire

$$(1) \quad e_n \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad n \rightarrow +\infty.$$

b1) Montrer par récurrence sur k qu'on a

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-2)^k k!}{(2x + \alpha)^{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

b2) En déduire la majoration

$$\sup_{x \in [-2, 0]} |f^{(n+1)}(x)| \leq \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(\alpha - 4)^{n+2}}.$$

b3) Majorer par une constante indépendante de $x \in [-2, 0]$ (mais dépendante de n) l'expression

$$|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|.$$

b4) Montrer le résultat attendu (1).

Exercice 3.

On considère $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A satisfait les 3 hypothèses suivantes:

- Chaque ligne de A est à diagonale dominante, c'est à dire:

$$|A_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |A_{ij}|, \quad \forall i \in [[1, n]].$$

- La première ligne de A est à diagonale strictement dominante, c'est à dire:

$$|A_{11}| > \sum_{j=2}^n |A_{1j}|$$

- Dans chaque ligne à partir de la deuxième il y a au moins un élément non nul en dessous de la diagonale, c'est à dire, pour tout $i \in [[2, n]]$ il existe $j \in [[1, n]]$ avec $j < i$ tel que $A_{ij} \neq 0$.

Le but de cet exercice est de montrer que l'algorithme de Gauss-Seidel converge pour cette matrice A . Nous considérons alors la décomposition vue en cours $A = D - E - F$ avec A diagonale, E triangulaire inférieure avec 0 sur la diagonale et F triangulaire supérieure avec 0 sur la diagonale et on pose $G = (D - E)^{-1}F$ la matrice de Gauss-Seidel. Donc nous voulons montrer

$$\rho(G) < 1$$

où $\rho(G)$ est le rayon spectral de la matrice G .

On va raisonner par absurde, donc on suppose que le contraire est vrai, c'est à dire $\rho(G) \geq 1$. On considère alors $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de G avec $|\lambda| \geq 1$ et soit $v \in \mathbb{C}^n$ avec $v \neq 0$ un vecteur propre de G correspondant à la valeur propre λ . Le but est d'arriver à une contradiction.

- a)** Montrer que λ et v satisfont

$$(2) \quad \lambda(D - E)v = Fv.$$

Dans la suite nous introduisons $p \in [[1, n]]$ tel que

$$|v_p| = \max_{j \in [[1, n]]} |v_j|$$

- b)** Montrer que

$$(3) \quad |A_{pp}| |v_p| \leq \sum_{j=1, j \neq p}^n |A_{pj}| |v_j|.$$

- c)** Montrer qu'on a

$$|A_{pp}| \leq \sum_{j=1, j \neq p}^n |A_{pj}|.$$

En déduire que si $p = 1$ on arrive à une contradiction ce qui donne le résultat souhaité.

Il reste alors à considérer le cas $p \geq 2$; donc dans toute la suite de l'exercice on supposera $p \geq 2$.

- d)** Montrer qu'il existe $j_1 \in [[1, n]]$ avec $j_1 < p$ tel que $|v_{j_1}| = |v_p|$.

e) En reprenant pour j_1 le même raisonnement fait avec p et en réitérant le procédé autant des fois que nécessaire, montrer qu'on arrive à une contradiction, ce qui nous donne le résultat souhaité.