

Exercice 1.

Pour toute fonction continue $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on note $I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$. On considère la formule simple de quadrature suivante pour approcher $I(f)$:

$$(1) \quad I_2(f) = \mu_0 f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \mu_1 f(0) + \mu_2 f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

avec $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

- a) Trouver μ_0, μ_1, μ_2 tels que (1) soit d'ordre au moins 2.
- b) Montrer que avec μ_0, μ_1, μ_2 trouvés au point précédent la formule (1) est d'ordre 5.

Exercice 2.

On considère l'équation différentielle scalaire: trouver $J \subset \mathbb{R}$ l'intervalle ouvert maximal d'existence et $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $y = y(t)$ satisfaisant l'EDO scalaire:

$$(2) \quad y' = y^\alpha + 1, \quad t \in \mathbb{R}$$

avec condition initiale

$$(3) \quad y(0) = 1.$$

Donner la solution du problème (2) - (3) dans les deux cas suivants:

- a) $\alpha = 1$
- b) $\alpha = 2$.

Indication: nous rappelons qu'une primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x^2+1}$ est la fonction $x \rightarrow \arctan(x)$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$f(0) = 0$$

(remarquer que 0 est à la fois racine et point fixe de f).

On considère la suite $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ des approximations successives donnée par la relation de récurrence:

$$(4) \quad \begin{cases} x_{k+1} = f(x_k), & \forall k \in \mathbb{N} \\ x_0 \in \mathbb{R} \text{ donné.} \end{cases}$$

On se propose d'étudier la convergence de cette suite dans le cas critique $f'(0) = 1$.

En fait on va supposer dans cet exercice que f admet le développement limité suivant autour de 0:

$$f(x) = x - ax^2 + x^2 \epsilon(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $a > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

a) Montrer qu'on a bien

$$f'(0) = 1.$$

Attention: nous n'avons aucune hypothèse de dérivabilité pour la fonction $x \rightarrow \epsilon(x)$

b) Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que si $x_0 \in]0, h[$ alors

b1) $x_k \in]0, h[, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

b2) la suite (x_k) est strictement décroissante

b3) $x_k \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow +\infty$.