

Exo 1.

$$a) \begin{cases} U_0 = U_{N+1} \\ \frac{U_1 - U_0}{h} = \frac{U_{N+1} - U_N}{h} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_0 = U_{N+1} \\ U_0 + U_{N+1} = U_1 + U_N \end{cases}$$

les inconnues sont ici U_0 et U_{N+1}

$$\Rightarrow \begin{cases} U_0 = U_{N+1} \\ 2U_0 = U_1 + U_N \end{cases}$$

Ceci donne $U_0 = U_{N+1} = \frac{U_1 + U_N}{2}$

$$b) -\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} + \gamma U_i = f(x_i) \quad i=1 \dots n$$

donc

$$-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1} + \gamma h^2 U_i = h^2 f(x_i)$$

donc

$$-U_{i-1} + (2 + \gamma h^2) U_i - U_{i+1} = h^2 f(x_i) \quad i=1 \dots n$$

Pour $i=1$ on utilise a)

$$-\frac{U_0 + U_N}{2} + (2 + \gamma h^2) U_1 - U_2 = h^2 f(x_1) \quad \text{donc}$$

$$(1)' \quad \left(\frac{3}{2} + \gamma h^2\right) U_1 - U_2 - \frac{1}{2} U_N = h^2 f(x_1)$$

Pour i de 2 à $N-1$ nous avons

$$(2)' \quad -U_{i-1} + (2 + \gamma h^2) U_i - U_{i+1} = h^2 f(x_i)$$

Pour $i=N$ on utilise encore a)

$$-U_{N-1} + (2 + \gamma h^2) U_N - \frac{U_1 + U_N}{2} = h^2 f(x_N) \quad \text{donc}$$

$$(3)' \quad -\frac{1}{2} U_1 - U_{N-1} + \left(\frac{3}{2} + \gamma h^2\right) U_N = h^2 f(x_N)$$

Donc le système de N équations algébriques et linéaire avec N inconnues $U_1 \dots U_N$ est donné par (1)'-(2)'-(3)'

Ceci s'écrit sous forme matricielle : on pose

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \text{ le vecteur inconnu}$$

$$b = \begin{pmatrix} h^2 f(x_1) \\ \vdots \\ h^2 f(x_N) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \gamma h^2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 + \gamma h^2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 + \gamma h^2 & -1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 + \gamma h^2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

On peut écrire A sous la forme

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{3}{2} + \gamma h^2 & i=j \in \{1, N\} \\ 2 + \gamma h^2 & i=j \in \{2, N-1\} \\ -1 & |i-j|=1 \\ -\frac{1}{2} & (i,j) = (1, N) \text{ ou } (N, 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc le système s'écrit sous la forme $AU = b$.

c) Il est facile de voir que $A_{ij} = A_{ji} \quad \forall i, j$ donc A est symétrique

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ arbitraire

$$\begin{aligned} (Ax, x) &= \sum_i \sum_j A_{ij} x_i x_j = \left(\frac{3}{2} + \gamma h^2\right) x_1^2 - 2x_1 x_2 - x_1 x_N \\ &+ (2 + \gamma h^2) x_2^2 - 2x_2 x_3 - \dots + (2 + \gamma h^2) x_{N-1}^2 - 2x_{N-1} x_N - \left(\frac{3}{2} + \gamma h^2\right) x_N^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2 x_3 + x_3^2 + \dots + x_{N-1}^2 - 2x_{N-1} x_N + x_N^2 + \frac{1}{2} x_1^2 - x_1 x_N + \frac{1}{2} x_N^2 \\ &= \frac{1}{2} (x_1 - x_2)^2 + \dots + \frac{1}{2} (x_{N-1} - x_N)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

3

Donc $\langle A + \lambda I \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$
 A est positive

d) Dans le cas $\lambda > 0$ le calcul précédent nous donne la minoration

$$\langle A + \lambda I \rangle \geq \lambda^2 + \lambda^2$$

Donc si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda^2 + \lambda^2 > 0$ donc
 $\langle A + \lambda I \rangle > 0$

e) Si $\lambda = 0$ alors

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \frac{3}{2} + \lambda/2 \end{pmatrix}$$

On observe que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

donc $\ker(A) \neq \{0\}$ donc A non inversible

Ex 2

a) $\|B\|_\infty = \max_{\text{d'après}} \{ |a|+2, |a|+4, |a|+2 \}$

$\|B\|_\infty = |a|+4$

De la même manière on montre

$\|B\|_1 = \max \{ |a|+2, |a|+4, |a|+2 \}$

donc $\|B\|_1 = |a|+4$

$\|B\|_2 = \rho(B)$ car B est matrice symétrique en $\mathbb{R}$

On cherche les valeurs propres de B

$P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & a-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & a-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{\text{développe colonne 1}}{=} \det \begin{pmatrix} a-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & a-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & a-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (a-\lambda) \det \begin{pmatrix} a-\lambda & -2 \\ -2 & a-\lambda \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & a-\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 &= (a-\lambda) \left[(a-\lambda)^2 - 4 \right] - 4(a-\lambda) \\
 &= (a-\lambda) \left[(a-\lambda)^2 - 8 \right] \\
 &= (a-\lambda) (a-\lambda - 2\sqrt{2}) (a-\lambda + 2\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = a, \lambda_2 = a - 2\sqrt{2}, \lambda_3 = a + 2\sqrt{2}$$

Alors

$$\|B\|_2 = \max \{ |a|, |a - 2\sqrt{2}|, |a + 2\sqrt{2}| \}$$

b) Si $a = 1$ alors

$$\|B\|_\infty = \|B\|_1 = 5$$

$$\|B\|_2 = \max \{ 1, |1 - 2\sqrt{2}|, |1 + 2\sqrt{2}| \} = 1 + 2\sqrt{2}$$

b) Voir page 5

Exo 3

$$a) \quad H_{ij} = \frac{1}{2i + 2j - 3} = \frac{1}{2j + 2i - 3} = H_{ji} \quad \text{X: j est 1, n}$$

donc H symétrique

b) Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ Alors

$$\langle Hx, x \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^1 t^{2i+2j-3} dt x_i x_j$$

$$= \int_0^1 \sum_i \sum_j t^{2i-2} x_i t^{2j-2} x_j dt \quad \left(\text{rappel: } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n t^{2i-2} x_i \right)^2 dt \geq 0$$

c) Supposons $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle Hx, x \rangle = 0$

$$\text{Donc } \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n t^{2i-2} x_i \right)^2 dt = 0$$

Alors la fonction $t \in [0, 1] \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i t^{2i-2}$ doit être la fonction nulle. Alors la seule possibilité est $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ (car on a un polynôme qui ne peut s'annuler que dans un nombre fini de points : contradiction éventuellement).

b) Exo. 2

Nous avons

$$\|D\|_3 = \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^4 \\ \|x\|_3 = 1}} \|Dx\|_3$$

~~$$\|D\|_3 = \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^4 \\ \|x\|_3 = 1}} \|Dx\|_3$$~~

Montrons " $\leq$ "

$$\forall x \in \mathbb{C}^4, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{on a} \quad Dx = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 2x_2 \\ -5x_3 \\ 3x_4 \end{pmatrix}$$

Soit $x \in \mathbb{C}^4$ t.q. $\|x\|_3 = 1$

Alors

$$\begin{aligned} \|Dx\|_3 &= \left(|-x_1|^3 + |2x_2|^3 + |-5x_3|^3 + |3x_4|^3 \right)^{1/3} \\ &= \left(|x_1|^3 + 8|x_2|^3 + 125|x_3|^3 + 27|x_4|^3 \right)^{1/3} \leq \\ &\leq \left(125 \left(|x_1|^3 + |x_2|^3 + |x_3|^3 + |x_4|^3 \right) \right)^{1/3} \\ &= 5 \|x\|_3 = 5 \end{aligned}$$

Donc

$$\|D\|_3 \leq 5$$

 $\forall x \in \mathbb{C}^4$: avec $\|x\|_3 = 1$ On passe au "sup" en x :

$$\|D\|_3 \leq 5$$

Montrons " $\geq$ "

$$\text{Prendre } y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_3 \in \mathbb{C}^4 : \text{ on a } \|y\|_3 = 1$$

$$Dy = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -5e_3 \quad \text{on a } \|Dy\|_3 = 5$$

Alors

$$\|D\|_3 = \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^4 \\ \|x\|_3 = 1}} \|Dx\|_3$$

$$\text{car } \|y\|_3 = 1$$

$$\geq \|Dy\|_3 = 5$$

donc

$$\|D\|_3 \geq 5$$

$$\text{Alors } \|D\|_3 = 5$$