Corrigé 1

Partiel 2 (PH) en MAM4A , 2024-2025

Pb 1.

a)

a1) On calcule les val. propres de A

$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 \\ -6 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+4)+18 =$

$= \lambda^2 - 5\lambda + 4\lambda - 20 + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2$

$\Delta = 1+8 = 9$ $\quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$; $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 2$

Donc A est strictement hyperbolique car $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Vect. propre P_1 relatif à $\lambda_1 = -1$?

$(A+I)x = 0 \iff \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ -6x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$ donc $x_2 = x_1$

prendre $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vect. propre P_2 relatif à $\lambda_2 = 2$?

$(A-2I)x = 0 \iff \begin{cases} -6x_1 + 3x_2 = 0 \\ -6x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ ce qui donne $x_2 = 2x_1$

prendre $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Alors $P = (P_1\ P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det P = 2-1 = 1$

$P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Alors $A = P\Lambda P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible

et $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale

a2) Le système de départ s'écrit

$\frac{\partial u}{\partial t} + P\Lambda P^{-1}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\quad (1)_1$

On pose $v = P^{-1}u$ et on multiplie $(1)_1$ à gauche par P^{-1}

$\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ c'est à dire

$(1)' \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$

et

$(2)' \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} + 2\frac{\partial v_2}{\partial x} = 0$

Alors $v(x,0) = P^{-1} u(x,0) = P^{-1} \cancel{g_0(x)}\ g(x)$

~~avec~~

$$v(x,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sin x \\ -1+\sin x \end{pmatrix}$$

donc

$(3)' \quad v_1(x,0) = \underbrace{2-\sin x}_{\text{noté } h_1(x)} , \ \forall x \in \mathbb{R}$

$(4)' \quad v_2(x,0) = \underbrace{-1+\sin x}_{= \text{noté } h_2(x)} , \ \forall x \in \mathbb{R}$

a3) Si on ~~resou~~ résoud (1) et (3)' cela donne

$v_1(x,t) = h_1(x+t) = 2 - \sin(x+t)$

$v_2(x,t) = h_2(x-2t) = -1 + \sin(x-2t)$

Alors $u = Pv$ donc

$$u(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-\sin(x+t) \\ -1+\sin(x-2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sin(x+t)+\sin(x-2t) \\ -\sin(x+t)+2\sin(x-2t) \end{pmatrix}$$

$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

b) On calcule $\Lambda^+ = \operatorname{diag}(\lambda_1^+, \lambda_2^+) = \operatorname{diag}(0,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Lambda^- = \operatorname{diag}(\lambda_1^-, \lambda_2^-) = \operatorname{diag}(\cancel{1,0})(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc

$$A^+ = P\Lambda^+ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^- = P\Lambda^- P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Le schéma de Godunov s'écrit

~~$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{h}\left[A^-(U_{i+1}^n - U_i^n) + A^+(\right.$~~

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{h}\left[A^+(U_i^n - U_{i-1}^n) - A^-(U_{i+1}^n - U_i^n) \right]$$

Problème 2.

~~a) $F(V,W) = \frac{u^*(0,t)}{f(u^*(V,W))}$ (indep de t)~~

(indep de t) avec

avec

a) $F(V,W) = f(v(0,t))$

v solution du pb. de Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(v) = 0 \\ v(x,0) = \begin{cases} V & \text{si } x < 0 \\ W & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Nous avons $f'(z) = 2z + 9$

$f''(z) = 2 > 0$

donc $f'' > 0$.

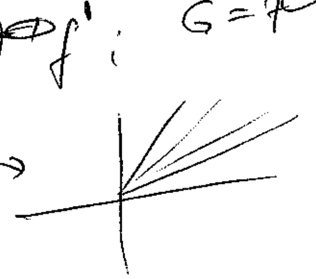
Calcul de $v(0,t)$ donc de $F(V,W)$

Cas 1. Si $V = W$ alors $v(x,t) = V \Rightarrow F(V,W) = f(V) = f(W)$

Cas 2. Si $V < W$ alors on a (onde de détente) $(f'(V) < f'(W))$

$$v(x,t) = \begin{cases} V & \text{si } x < f'(V)t \\ G(\frac{x}{t}) & \text{si } f'(V)t < x < f'(W)t \\ W & \text{si } x > f'(W)t \end{cases}$$

où G est la réciproque de f' ; $G = (f')^{-1}$



On a alors

$$v(0,t) = \begin{cases} V & \text{si } f'(V) \geq 0 \\ W & \text{si } f'(W) \leq 0 \\ (f')^{-1}(0) & \text{si } f'(V) < 0 < f'(W) \end{cases}$$

(car $f'(z) = 2z + 9$)

Donc dans le cas $V < W$ on a ~~$V' \geq -\frac{9}{2}$~~ $V \geq -\frac{9}{2}$

$$F(V,W) = \begin{cases} f(V) & \text{si} \\ f(W) & \text{si } W \leq -\frac{9}{2} \\ f(-\frac{9}{2}) & \text{si } V < -\frac{9}{2} < W \end{cases}$$

4

Remarque : $(f')^{-1}(0) = -\frac{a}{2}$ $y \Leftrightarrow f'(y)=0 \Leftrightarrow 2y+a=0$
$\Rightarrow y = -\frac{a}{2}$

donc $(f')^{-1}(0) = -\frac{a}{2}$

Cas 3. si $V > W$ alors on a (choc)

$$v(x,t) = \begin{cases} V & \text{si } x < \sigma t \\ W & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$$

avec $\sigma = \dfrac{f(V)-f(W)}{V-W} = \dfrac{V^2+aV+b-(W^2+aW+b)}{V-W}$

$= \dfrac{(V-W)(V+W)+a(V-W)}{V-W} = V+W+a$

Alors

$$v(x,0) = \begin{cases} V & \text{si } \sigma \geq 0 \quad (\Leftrightarrow V+W+a \geq 0) \\ W & \text{si } \sigma < 0 \quad (\Leftrightarrow V+W+a < 0) \end{cases}$$

Donc dans le cas $V > W$ on a

$$F(V,W) = \begin{cases} f(V) & \text{si } V+W+a \geq 0 \\ f(W) & \text{si } V+W+a < 0 \end{cases}$$

Finalement on a

$$F(V,W) = \begin{cases} f(V) & \text{si } (V \leq W \text{ et } V \geq -\frac{a}{2}) \text{ ou } (V > W \text{ et } V+W+a \geq 0) \\ f(W) & \text{si } (W \leq W \text{ et } W \leq -\frac{a}{2}) \text{ ou } (V > W \text{ et } V+W+a < 0) \\ f(-\frac{a}{2}) & \text{si } V < -\frac{a}{2} < W \end{cases}$$

b) On calcule $\hat{A} = \hat{A}(V,W)$

$$\hat{A} = \begin{cases} \dfrac{f(V)-f(W)}{V-W} & \text{si } V \neq W \\ f'(V) & \text{si } V = W \end{cases}$$

$$\hat{A} = \begin{cases} V + W + a & \text{si } V \neq W \\ 2V + a & \text{si } V = W \end{cases} \qquad \forall (V, W) \in \mathbb{R}^2$$

On peut dire

$$\cancel{\hat{A}} \; \hat{A} = \hat{A}(V, W) = V + W + a$$

Nous avons alors

$$F(V, W) = \begin{cases} f(V) & \text{si } V + W + a \geq 0 \\ f(W) & \text{si } V + W + a < 0 \end{cases}$$