Polytech Lyon, MAM4A, 2024 - 2025

Problèmes Hyperboliques (PH)

Partiel 2

Durée 1h30 - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Problème 1

On considère la loi de conservation vectorielle linéaire: trouver $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

et

$$g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin x \end{pmatrix}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

a) On se propose de calculer explicitement la solution (classique) du système (1).

a1) Montrer que A est une matrice strictement hyperbolique et écrire A sous la forme $A = P\Lambda P^{-1}$ où P et Λ sont des matrices avec les propriétés vues en cours.

a2) Faire le changement d'inconnue vu en cours et ramener le système principal du départ à un système de deux équations scalaires et linéaire.

a3) Donner la solution classique de (1).

b) Ecrire le schéma de Godunov pour approcher numériquement la solution de (1) (schéma "upwind"), en utilisant les notations vues en cours.

Problème 2

On considère la loi de conservation scalaire non-linéaire:
Trouver $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 & x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

avec $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f(z) = z^2 + az + b,\ \ \forall\, z \in \mathbb{R}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ paramètres donnés.

a) On se propose d'écrire le schema de Godunov pour approcher numériquement le problème (2). Avec les notations vues en cours nous avons

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{h}[F(U_i^n, U_{i+1}^n) - F(U_{i-1}^n, U_i^n)], \quad \forall\, i \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

où F est le flux numérique correspondant au schéma de Godunov.
Calculer la fonction F en donnant explicitement $F(V, W)$ pour tout couple $(V, W) \in \mathbb{R}^2$.

b) On se propose d'écrire le schema de Roe pour approcher numériquement le problème (2). Avec les notations vues en cours nous avons

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{h}[F(U_i^n, U_{i+1}^n) - F(U_{i-1}^n, U_i^n)], \quad \forall\, i \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

où F est cette fois-ci le flux numérique qui correspond au schéma de Roe.
Calculer la fonction F en donnant explicitement $F(V, W)$ pour tout couple $(V, W) \in \mathbb{R}^2$.