Corrigé Partiel 1 (PH) MAM4A 2025-2026

Problème

Partie I.

Ia) On a

$f'(z) = \frac{v_m}{u_m}(u_m - 2z)$

$f''(z) = -2\frac{v_m}{u_m} < 0$

Comme $\frac{1}{8}u_m < \frac{3}{4}u_m$ (car $\frac{1}{8} < \frac{3}{4}$ et $u_m > 0$)

alors la solution est un choc entropique. (car $f'(\frac{1}{8}u_m) > f'(\frac{3}{4}u_m)$)

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{8}u_m & \text{si } x < \sigma t \\ \frac{3}{4}u_m & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$$

avec $\sigma = f[\frac{1}{8}u_m, \frac{3}{4}u_m] = \dfrac{f(\frac{3}{4}u_m) - f(\frac{1}{8}u_m)}{\frac{3}{4}u_m - \frac{1}{8}u_m}$

Faisons le calcul general $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f[a,b]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{v_m}{u_m}\left(\frac{u_m b - b^2 - u_m a + a^2}{b-a}\right) = \frac{v_m}{u_m}\left(\frac{u_m(\cancel{b-a}) - (\cancel{b-a})(b+a)}{\cancel{b-a}}\right)$$

donc

$$(1)' \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{v_m}{u_m}(u_m - a - b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b$$

On utilise (1)' avec $a = \frac{u_m}{8}$, $b = \frac{3}{4}u_m$

~~Alors $\sigma = \frac{v_m}{u_m}(u_m$~~

donc

$$\sigma = \frac{v_m}{u_m}\left(u_m - \frac{3}{4}u_m - \frac{1}{8}u_m\right) = v_m\left(1 - \frac{6}{8} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}v_m$$

Donc la solution entropique est

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{8}u_m & \text{si } x < \frac{1}{8}v_m t \\ \frac{3}{4}u_m & \text{si } x > \frac{1}{8}v_m t \end{cases}$$

Ib) On peut dire que le "bouchon" se deplace avec une vitesse $= \frac{1}{8}v_m$ ~~donc~~ > 0 (donc dans le sens positif.). La zone avec trafic leger augmente au cours du temps, donc le trafic devient moins dense globalement.

Partie II

II a) Comme $\frac{1}{2}u_m > \frac{1}{4}u_m$ et $f'' < 0$ alors on sait que la solution entropique u_1 est donnée par une onde de détente :

$$u_1(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_m & \text{si } x < \sigma_1 t \\ h\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } \sigma_1 t < x < \sigma_2 t \\ \frac{1}{4}u_m & \text{si } x > \sigma_2 t \end{cases}$$

avec $\sigma_1 = f'\left(\frac{1}{2}u_m\right)$, $\sigma_2 = f'\left(\frac{1}{4}u_m\right)$

et h la fonction réciproque de f' donc

$f'\left(\frac{1}{2}u_m\right) = \frac{v_m}{u_m}(u_m - u_m) = 0$

$\sigma_1 = 0$

$f'\left(\frac{1}{4}u_m\right) = \frac{v_m}{u_m}\left(u_m - 2\,\frac{1}{4}u_m\right) = \frac{v_m}{u_m}\,\frac{u_m}{2} = \frac{v_m}{2}$ donc

$\sigma_2 = \frac{v_m}{2}$

Pour calculer h la réciproque de f' : pour tout $y \in R$ arbitraire on cherche $z \in R$ tel que

$f'(y) = z$

donc $\frac{v_m}{u_m}(u_m - 2z) = y \iff u_m - 2z = \frac{u_m}{v_m}y \Rightarrow$

$z = \frac{1}{2}\left(u_m - \frac{u_m}{v_m}y\right)$. Alors

$h(y) = (f')^{-1}(y) = \frac{u_m}{2v_m}(v_m - y)$, $\forall y \in R$

Alors

$$u_1(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_m & \text{si } x < 0 \\ \frac{u_m}{2v_m}\left(v_m - \frac{x}{t}\right) & \text{si } 0 < x < \frac{v_m}{2}t \\ \frac{1}{4}u_m & \text{si } x > \frac{v_m}{2}t \end{cases}$$

II b) Ici on a $\frac{1}{4}u_m < \frac{1}{3}u_m$ donc la solution est analogue à la solution de la Partie 1, ~~donc la solution est~~ et c'est un <u>choc entropique</u> :

$$u_2(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{4}u_m & \text{si } x < 2v_m + \sigma_3 t \\ \frac{1}{3}u_m & \text{si } x > 2v_m + \sigma_3 t \end{cases}$$

avec $\sigma_3 = f\left(\frac{1}{4}u_m, \frac{1}{3}u_m\right)$

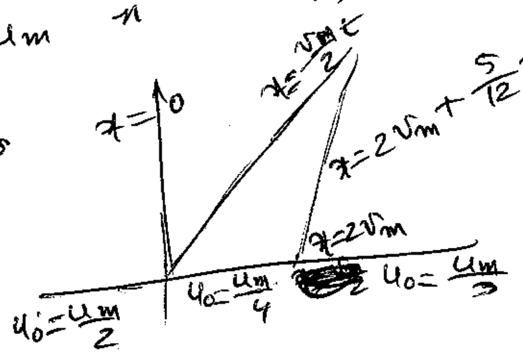
On utilise encore (1)' avec $a = \frac{1}{4}u_m$ et $b = \frac{1}{3}u_m$

$\sigma_3 = \frac{v_m}{u_m}\left(u_m - \frac{1}{4}u_m - \frac{1}{3}u_m\right) = v_m\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)$. Alors

$\sigma_3 = \frac{5}{12}v_m$ donc

$$u_2(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{4}u_m & \text{si } x < 2v_m + \frac{5}{12}v_m t \\ \frac{1}{3}u_m & \text{si } x > 2v_m + \frac{5}{12}v_m t \end{cases}$$

II c) ~~Nous~~



La pente de la droite $\{x = \frac{v_m}{2}t\}$ est plus grande que la pente de la droite $\{x = 2v_m + \frac{5}{12}v_m t\}$

$\left(\frac{v_m}{2} > \frac{5}{12}v_m\right)$

Alors les 2 droites vont se rencontrer pour un $t = t_1 > 0$

~~le point d~~

$$\begin{cases} x = \frac{v_m}{2}t \\ \text{et} \\ x = 2v_m + \frac{5}{12}v_m t \end{cases}$$

$\iff 2v_m + \frac{5}{12}v_m t = \frac{v_m}{2}t \iff 2v_m = v_m\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{12}\right)t$

$2v_m = v_m \frac{1}{12}t$

Ceci donne $t = t_1 = 24$.

Alors pour $(x,t) \in R \times [0,24]$ on a

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} u_m & \text{si } x < 0 \\ \frac{u_m}{2v_m}\left(v_m - \frac{x}{t}\right) & \text{si } 0 < x < \frac{v_m}{2} t \\ \frac{1}{4} u_m & \text{si } \frac{v_m}{2} t < x < 2v_m + \frac{5}{12} v_m t \\ \frac{1}{3} u_m & \text{si } x > 2v_m + \frac{5}{12} v_m t \end{cases}$$

II d)

II d1) Le point $(t_1, \frac{v_m}{2} t_1)$ doit appartenir à la courbe Γ_4

donc $(24, 12 \cancel{t_1}\, v_m) \in \Gamma_4$

$\xi(24) = 12 v_m$

Si on prend en (5) :

$h(x,t) = \frac{u_m}{2v_m}\left(v_m - \frac{x}{t}\right)$ alors en dehors des courbes de singularité ~~⇒~~ la loi de conservation est satisfaite classiquement

Il reste à montrer la condition ~~(R~~ de Rankine-Hugoniot (RH) en Γ_4

Il est facile de voir

$u_+ = [u_+]_\Gamma = \frac{1}{3} u_m$

$u_- = [u_-]_\Gamma = h\left(\frac{\xi(t)}{t}\right) = \frac{u_m}{2v_m}\left(v_m - \frac{\xi(t)}{t}\right)$

On doit avoir

$\cancel{f(u_+)}\; f(u_+) - f(u_-) = \xi'(t)(u_+ - u_-)$

c'est à dire

$\xi'(t) = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = f(u_-, u_+)$

On utilise (1)'

$\xi'(t) = \frac{v_m}{u_m}(u_m - u_+ - u_-) = \frac{v_m}{u_m}\Big[u_m - \frac{1}{3}u_m - \frac{u_m}{2v_m}\left(v_m - \frac{\xi}{t}\right)\Big]$

La partie de droite de l'égalité précédente s'écrit

$$\frac{v_m}{u_m}\Big[\underbrace{u_m-\tfrac13 u_m-\tfrac12 u_m}_{=u_m(1-\frac13-\frac12)}+\frac{u_m}{2v_m}\frac{\xi}{t}\Big]=$$

$$=\frac{v_m}{u_m}\Big[\frac16 u_m+\frac{u_m}{2v_m}\frac{\xi}{t}\Big]=\frac16 v_m+\frac{\xi(t)}{2t}$$

Alors la fonction ξ satisfait l'EDO

$(2)'$ $\xi'(t)=\frac16 v_m+\frac{\xi(t)}{2t}$

avec condition initial

$(3)'$ $\xi(24)=12v_m$

On applique la formule de Duhamel pour trouver $\xi(t)$

l'unique solution de $(2)'-(3)'$:

$$\xi(t)=12v_m\exp\Big(\int_{24}^t\frac{1}{2s}ds\Big)+\frac16 v_m\int_{24}^t\exp\Big(\int_s^t\frac{d\tau}{2\tau}\Big)ds$$

$$=12v_m\exp\Big(\frac12\ln\Big(\frac{t}{24}\Big)\Big)+\frac16 v_m\int_{24}^t\exp\Big(\frac12\ln\Big(\frac{t}{s}\Big)\Big)ds$$

$$=12v_m\sqrt{\frac{t}{24}}+\frac16 v_m\underbrace{\int_{24}^t\frac{\sqrt t}{\sqrt s}ds}_{=\sqrt t\,[2\sqrt s]_{24}^t=\sqrt t(2\sqrt t-2\sqrt{24})}$$

Alors

$(4)'$ $\xi(t)=v_m\Big(\frac13 t+\alpha\sqrt t\Big)$ avec $\alpha=\sqrt6-\sqrt{\frac83}>0$

Observons que $\xi(t)>0$, $\forall t>0$ donc cette solution sera valable pour tout ~~$t>24$~~ $t\in[24,+\infty[$.

Il reste à vérifier la condition d'admissibilité pour l'entropie sur Γ_4 : et ceci $\forall t>24$

$(5)'$ $f'(u_-)>\xi'>f'(u_+)$

$$f'(u_+)=\frac{v_m}{u_m}(u_m-2u_+)=\frac{v_m}{u_m}\Big(u_m-\frac23 u_m\Big)=\frac{v_m}{3}$$

De $(4)'$ $\Rightarrow$

$$\xi'(t)=\frac{v_m}{3}+\alpha v_m\frac{1}{2\sqrt t}>\frac{v_m}{3}$$

(c'est OK pour la deuxième inégalité de $(5)'$)

$$f'(u_-) = \frac{v_m}{u_m}\left(u_m - 2u_-\right) = \frac{v_m}{u_m}\left(u_m - 2\frac{u_m}{2v_m}\left(v_m - \frac{\xi}{t}\right)\right) =$$

$$= \frac{v_m}{u_m}\left(u_m - u_m + \cancel{2}\frac{u_m}{v_m}\frac{\xi}{t}\right) = \frac{\xi(t)}{t}$$

Alors de (4)' :

$$f'(u_-) = v_m\left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha}{\sqrt{t}}\right) > \frac{v_m}{3} + \frac{\alpha v_m}{2\sqrt{t}}$$

(c'est OK pour la première inégalité de (5)'

II d2) Nous avons donc la solution entropique global

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_m & \text{si } x < 0 \\ \frac{u_m}{2v_m}\left(v_m - \frac{x}{t}\right) & \text{si } \left(0 < x < \frac{v_m}{2}t \text{ et } t < 24\right) \text{ ou } \left(0 < x < v_m\left(\frac{1}{3}t + \alpha\sqrt{t}\right) \text{ et } t > 24\right) \\ \frac{1}{4}u_m & \text{si } \frac{v_m}{2}t < x < 2v_m + \frac{5}{12}v_m t \text{ et } t < 24 \\ \frac{1}{3}u_m & \text{si } \left(x > 2v_m + \frac{5}{12}v_m t \text{ et } t > 24\right) \text{ ou } \left(x > v_m\left(\frac{1}{3}t + \alpha\sqrt{t}\right) \text{ et } t > 24\right) \end{cases}$$