Corrigé Partiel 2

1. a1) $f \in C^2$, $f'(z) = 4z^3 + 2z$

$f''(z) = \underbrace{12z^2}_{\geq 0} + 2 \geq 2 > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$

a2) Comme $f'' > 0$ alors la solution ~~est~~ v est suivant les 3 cas suivants :

Cas 1 : Si $V = W$ alors $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[$

$v(x,t) = V$, $\forall t \geq 0$

donc $v(0,t) = V$

Cas 2 : Si $V > W$ alors on a $f'(V) > f'(W)$ (car f' est strictement croissante)

Alors v est donnée par un choc

$$v(x,t) = \begin{cases} V & \text{si } x < \sigma t \\ W & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$$

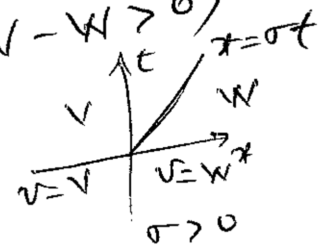
avec $\sigma = \dfrac{f(V) - f(W)}{V - W}$.

Nous avons aussi

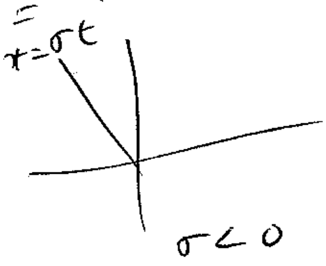
Cas 2a) Si $f(V) \geq f(W)$ alors $\sigma \geq 0$ (car $f(V) - f(W) \geq 0$ et $V - W > 0$)

donc $v(0,t) = V \quad \forall t \geq 0$

(voir dessin)



Cas 2b) Si $f(V) < f(W)$ alors $\sigma < 0$ donc $v(0,t) = W$, $\forall t \geq 0$



Cas 3 : Si $V < W$ alors on a

$f'(V) < f'(W)$

Alors v est donnée par une onde de détente

$$(1)' \quad v(x,t) = \begin{cases} V & \text{si } x < s_1 t \\ \varphi\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } s_1 t < x < s_2 t \\ W & \text{si } x > s_2 t \end{cases}$$

avec $s_1 = f'(V)$ $\quad (s_1 < s_2)$
$s_2 = f'(W)$
et φ est la réciproque de la fonction f'

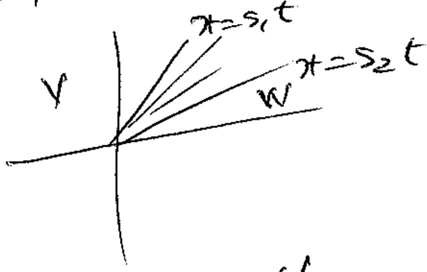
On a :
$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$f'(z) = 4z^3 + 2z$ fonction strictement croissante
$\lim_{z \to -\infty} f'(z) = -\infty$; $\lim_{z \to \infty} f'(z) = +\infty$
Alors f' est une bijection de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$
donc $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

$$f' \circ \varphi = \varphi \circ f' = Id.$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}$ calculons $\varphi(y)$
On a : $f'(\varphi(y)) = y$ $\quad \forall y \in \mathbb{R}$ donc

$(2)'$ $\quad 4\varphi^3(y) + 2\varphi(y) = y$
(difficile à résoudre, donc on ne sait pas donner une formule pour $\varphi(y)$
Remarque : si $y = 0$ alors l'équation $(2)'$ a comme unique solution $\varphi(y) = 0$
Donc
$(3)'$ $\varphi(0) = 0$
De $(1)'$ on déduit $v(0,t)$:
Cas 3a) $\quad$ Si $f'(V) > 0$ alors $v(0,t) = V$
Remarque : $f'(V) > 0 \iff 4V^3 + 2V > 0 \Rightarrow$
$2V(\underbrace{2V^2+1}_{>0}) > 0 \iff V > 0$

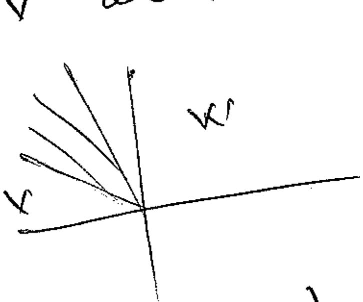
On a donc : si $W > V > 0$ alors $v(0,t) = V$ $\forall t \geq 0$



Cas 3 b. Si $f'(W) < 0$ alors $v(0,t) = W$

Comme dans le Cas 2 a) $f'(W) < 0 \Leftrightarrow W < 0$

donc si ~~$V < W < 0$~~ $0 > W > V$ alors $v(0,t) = W$ $\forall t \geq 0$



Cas 3 c) Si $f'(V) \leq 0$ et $0 \leq f'(W)$

(ce qui est equivalent avec $V \leq 0 \leq W$) (grâce à (3)')

alors $v(0,t) = \varphi(\frac{0}{t}) = \varphi(0) = 0$ $\forall t \geq 0$

Donc si $W \geq 0 \geq V$ alors $v(0,t) = 0$

a3) Nous avons (independante de t)

$F(V,W) = f(v(0,t))$ ce qui donne

On regarde a2)

$$F(V,W) = \begin{cases} f(V) & \text{si } (V \geq W \text{ et } f(V) \geq f(W)) \text{ ou } (W > V > 0) \\ f(W) & \text{si } (V \geq W \text{ et } f(V) \leq f(W)) \text{ ou } (0 > W > V) \\ 0 & \text{si } W \geq 0 \geq V \end{cases}$$

(car $f(0) = 0$)

b) On ~~doit~~ doit calculer $F(u_i^0, u_{i+1}^0)$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.
On sait que si $u_i^0 = u_{i+1}^0$ alors $F(u_i^0, u_{i+1}^0) = f(u_i^0)$

Alors

$$F(u_i^0, u_{i+1}^0) = f(u_i^0) = (u_i^0)^4 + (u_i^0)^2$$ si

$i \leq -1$ ou $i \in [1, 99]$ ou $i \in [101, +\infty[$

donc

$$F(u_i^0, u_{i+1}^0) = \begin{cases} 1^4 + 1^2 = 2 & \text{si } i \leq -1 \\ (-2)^4 + (-2)^2 = 20 & \text{si } 1 \leq i \leq 99 \\ 1^4 + 1^2 = 2 & \text{si } i \geq 101 \end{cases}$$

Il reste à calculer $F(u_0^0, u_1^0)$ et $F(u_{100}^0, u_{101}^0)$

$F(u_0^0, u_1^0) = F(1, -2)$; nous somme ici dans le cas 2 $(1 > -2)$

$f(1) = 2$; $f(-2) = 20$; $f(1) < f(-2)$

donc nous sommes dans le cas 2b) donc

$$F(1, -2) = f(-2) = 20$$

$F(u_{100}^0, u_{101}^0) = F(-2, 1)$

Nous somme ici dans le cas 3 $(-2 < 1)$

En plus $1 \geq 0 \geq -2$ donc nous sommes dans le cas 3c) donc

$F(-2, 1) = f(0) = 0$. Alors

$$F(u_i^0, u_{i+1}^0) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \leq -1 \\ 20 & \text{si } 0 \leq i \leq 99 \\ 0 & \text{si } i = 100 \\ 2 & \text{si } i \geq 101 \end{cases}$$

~~Alors~~ Nous avons

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \underbrace{\frac{\Delta t}{h}}_{=1} \left[F(u_i^0, u_{i+1}^0) - F(u_{i-1}^0, u_i^0) \right], \ \forall i \in \mathbb{Z}$$

si $i \leq -1$

$F(U_i^0, U_{i+1}^0) = F(U_{i-1}^0, U_i^0) = 2$ donc

~~$U_i^{n+1} = U_i^n = 1$~~ $U_i^1 = U_i^0 = 1$

si $i=0$

~~$F(U_{-1}^0, U_0^0) = 2 \quad 2$ et $F(U_{-2}^0, U$~~

$F(U_0^0, U_1^0) = 20$ et $F(U_{-1}^0, U_0^0) = 2$. Alors

$U_0^{n+1} = U_0^n - \left(F(U_0^0, U_1^0) - F(U_{-1}^0, U_0^0)\right)$

$= 1 - (20-2) = -17$

si $i \in [\![1, 99]\!]$ donc

$F(U_i^0, U_{i+1}^0) = F(U_{i-1}^0, U_i^0) = 20$

$U_i^1 = U_i^0 = -2$

si $i = 100$

$F(U_{100}^0, U_{101}^0) = 0$; $F(U_{99}^0, U_{100}^0) = 20$

donc $U_{100}^1 = U_{100}^0 - \left(F(U_{100}^0, U_{101}^0) - F(U_{99}^0, U_{100}^0)\right)$

$= -2 - (0-20) = 18$

si $i = 101$

$F(U_{101}^0, U_{102}^0) = 2$; $F(U_{100}^0, U_{101}^0) = 0$ donc

$U_{101}^1 = U_{101}^1 - \left(F(U_{101}^0, U_{102}^0) - F(U_{100}^0, U_{101}^1)\right) =$

$= 1 - (2-0) = -1$

si $i \geq 102$

$F(U_i^0, U_{i+1}^0) = F(U_{i-1}^0, U_i^0) = 2$ donc

$U_i^1 = U_i^0 = 1$

Donc

$$U_i^1 = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq -1 \text{ ou } i \geq 102 \\ -2 & \text{si } 1 \leq i \leq 99 \\ -17 & \text{si } i = 0 \\ 18 & \text{si } i = 100 \\ -1 & \text{si } i = 101 \end{cases}$$

Probleme 2.

On suit la demarche vue en cours avec

$f(W) - f(V) = \hat{A}(V, W)(W - V)$

$\hat{A}(V, W) = \int_0^1 J_f(V + s(W - V))\,ds$

$J_f(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a z_1 & b z_2 \end{pmatrix}, \quad \forall z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$J_f(V + s(W - V)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a[V_1 + s(W_1 - V_1)] & b[V_2 + s(W_2 - V_2)] \end{pmatrix}$

$\int_0^1 0 = 0 \; ; \; \int_0^1 1 = 1 \; ; \; \int_0^1 a[V_1 + s(W_1 - V_1)]\,ds =$

$= aV_1 + a(W_1 - V_1) \underbrace{\int_0^1 s\,ds}_{=\frac{1}{2}} = aV_1 + \frac{1}{2}a(W_1 - V_1) = \frac{1}{2}aV_1 + \frac{1}{2}aW_1$

De la meme manière

$\int_0^1 b[V_2 + s(W_2 - V_2)]\,ds = \frac{1}{2}bV_2 + \frac{1}{2}bW_2$

Alors

1. $\hat{A}(V, W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a}{2}(V_1 + W_1) & \frac{b}{2}(V_2 + W_2) \end{pmatrix}$

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$\det(\hat{A}(V, W) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{a}{2}(V_1 + W_1) & \frac{b}{2}(V_2 + W_2) - \lambda \end{pmatrix}$

$= \lambda^2 - \frac{b}{2}(V_2 + W_2) - \frac{a}{2}(V_1 + W_1)$

le descreminant est $\Delta = \frac{b^2}{4}(V_2 + W_2)^2 + 2a(V_1 + W_1)$

Comme $V, W \in \Omega$ alors $V_1 > 0$ et $W_1 > 0$.

Alors $\Delta > 0$; donc les 2 valeurs propres de $\hat{A}(V, W)$ sont réelles et distinctes. ~~OK~~

donc $\hat{A}(V, W)$ est strictement hyperbolique