

Problèmes Hyperboliques (PH)

Partiel 1

Durée 1h30 - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Problème

On considère ici le modèle de trafic routier vu en cours. On introduit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(z) = \frac{v_m}{u_m} z(u_m - z), \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

avec $u_m > 0$ donnée (densité maximale) et $v_m > 0$ donnée (vitesse maximale).

On se donne aussi une fonction $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ (c'est la donnée initiale).

On considère le problème suivant: trouver $u(x, t) \in \mathbb{R}$ (densité des voitures) satisfaisant la loi de conservation scalaire:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

Nous cherchons l'unique solution entropique de ce problème.

Partie I). On suppose dans cette partie

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}u_m & \text{si } x < 0 \\ \frac{3}{4}u_m & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

ce qui correspond à un problème de Riemann.

Ia) Donner la solution entropique de (1) et justifier.

Conseil: calculer et simplifier l'expression: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$; cette expression sera très souvent utilisée dans la suite du problème.

Ib) Remarquons que la donnée initiale u_0 correspond ici à un trafic légère pour $x < 0$ et à un trafic dense pour $x > 0$. Que peut-on dire de l'évolution du trafic quand le temps t augmente? (voir si le trafic devient ou non de moins en moins dense globalement).

Partie II). On suppose ici qu'on a une densité initiale donnée par

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_m & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4}u_m & \text{si } 0 < x < 2v_m \\ \frac{1}{3}u_m & \text{si } x > 2v_m. \end{cases} \quad (2)$$

(cette donnée initiale correspond à un problème de Riemann généralisé).

IIa) Donner la solution entropique u_1 du problème de Riemann "focalisé" en $x = 0$; c'est à dire, la solution qu'on aurait si la donnée initiale était

$$u_{01}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_m & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4}u_m & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (3)$$

IIb) Donner la solution entropique u_2 du problème de Riemann "focalisé" en $x = 2v_m$; c'est à dire, la solution qu'on aurait si la donnée initiale était

$$u_{02}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}u_m & \text{si } x < 2v_m \\ \frac{1}{3}u_m & \text{si } x > 2v_m. \end{cases} \quad (4)$$

IIc) En déduire la solution entropique $u(x, t)$ de (1) pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, t_1[$ avec $t_1 > 0$ à déterminer; montrer que cette solution est du type "onde de détente" suivi d'un "choc". Faire une illustration graphique approximative pour cette solution.

IId) Le but de cette partie est de donner la solution entropique pour $t \geq t_1$ avec t_1 trouvée dans **IIc)**. Pour ceci on introduit une courbe de singularité

$$\Gamma_4 = \{(\xi(t), t), t \geq t_1\}$$

avec $\xi : [t_1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Nous proposons alors la solution suivante pour $t \geq t_1$:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_m & \text{si } x < 0 \\ h\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } 0 < x < \xi(t) \\ \frac{1}{3}u_m & \text{si } x > \xi(t) \end{cases} \quad (5)$$

avec h la fonction qui correspond à l'onde de détente calculée aux points précédents.

IIId1) Trouver h et $\xi(t)$ telle que l'expression (5) soit la solution entropique sur $[t_1, +\infty[$.

IIId2) Ecrire la solution entropique globale u sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.