Polytech Lyon, MAM4A, 2025 - 2026

Problèmes Hyperboliques (PH)

Partiel 2

Durée 1h30 - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Problème 1

On se donne $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(z) = z^4 + z^2, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}.$$

On considère la loi de conservation scalaire non-linéaire avec condition initiale:
Trouver $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 & x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

a) On considère le schema de Godunov pour approcher numériquement le problème (1), qui s'écrit avec les notations du cours, sous la forme

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{h}[F(U_i^n, U_{i+1}^n) - F(U_{i-1}^n, U_i^n)], \quad \forall\, i \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

On se propose ici de calculer la fonction F (le flux numérique correspondant au schéma de Godunov).

a1) Montrer que f est de classe C^2, calculer f'' et montrer qu'elle a un signe constant; lequel?

a2) Pour tout $(V, W) \in \mathbb{R}^2$ on considère la solution entropique du problème de Rieman: trouver $v : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $v = v(x,t)$ solution de la loi de conservation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(v) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0$$

avec donnée initiale

$$v(x,0) = \begin{cases} V & \text{si} \quad x < 0 \\ W & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Calculer $v(0,t)$ pour tout $t \geq 0$.
Indication: on peut noter par φ la fonction réciproque de f'; nous ne savons pas donner une expression explicite de φ. Montrer et utiliser le fait que $\varphi(0) = 0$; montrer et utiliser aussi le fait que $f'(z) > 0 \iff z > 0$.

a3) Trouver la fonction F.

b) On suppose ici que g est tel que le choix que nous faisons pour les U_i^0, $i \in \mathbb{Z}$ est le suivant

$$U_i^0 = \begin{cases} 1 & \text{si} & i \leq 0 \\ -2 & \text{si} & i \in [[1, 100]] \\ 1 & \text{si} & i \geq 101. \end{cases}$$

Supposons aussi qu'on a $h = 0,01$ et $\Delta t = 0,01$. Calculer pour tout $i \in \mathbb{Z}$ le nombre $U_i^1 \in \mathbb{R}$ obtenu en utilisant le schéma numérique (2).

Problème 2

On se donne des constantes $a, b > 0$ et on considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ \\ \frac{1}{2}az_1^2 + \frac{1}{2}bz_2^2 \end{pmatrix}, \quad \forall\, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

On considère la loi de conservation vectorielle non-linéaire:
trouver $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2,\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ tel que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0. \tag{3}$$

On considère dans la suite l'ensemble:

$$\Omega =]0, +\infty[\, \times \mathbb{R} = \{z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad z_1 > 0\}.$$

En suivant éventuellement une démarche vue en cours (mais ce n'est pas indispensable!) trouver une fonction $\hat{A} : \Omega \times \Omega \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ satisfaisant les propriétés suivantes:

1. $$f(W) - f(V) = \hat{A}(V, W)(W - V), \quad \forall\, (V, W) \in \Omega \times \Omega$$

2. $\hat{A}(V, W)$ est une matrice strictement hyperbolique pour tout couple $(V, W) \in \Omega \times \Omega$

Remarque: *une telle fonction $\hat{A}$ servira à écrire un schéma de Roe pour le système* (3)*; nous pouvons nous limiter à l'ensemble Ω car on peut démontrer un "principe de maximum" qui assure que la solution u reste dans Ω si la donnée initiale est dans Ω.*