Université Claude Bernard, Lyon 1 Master SITN, Mathématiques

Examen Systèmes dynamiques, 2011-2012

durée 3h, une feuille de notes manuscrites authorisée

Problème 1.

Soit A la matrice carrée réelle

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha - 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

avec $\alpha \in I\!R$ un paramètre et considérons le système différentiel linéaire:
trouver $X = (X_1, X_2)^T : I\!R \to I\!R^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que

$$X'(t) = AX(t), \quad t \geq 0. \tag{2}$$

a) Déterminer les valeurs de α pour lesquels le point stationnaire 0 du système (2) est:
- un noeud stable,
- un noeud instable,
- un foyer stable,
- un foyer instable,
- un point selle.

b) On suppose dans toute cette partie que $\alpha = \frac{9}{4}$.
Indication: pour toutes les questions de cette partie il pourrait être utile de faire le changement d'inconnue $X(t) = PY(t)$ avec P une matrice inversible appropriée.

b1) Déterminer toutes les solutions du système (2) et tracer les courbes solutions (portrait de phase) dans le plan (X_1, X_2).

b2) Résoudre le système (2) avec la condition initiale

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et tracer la courbe solution $\{X(t),\ t \geq 0\}$ dans le plan (X_1, X_2). Montrer que pour $t \to +\infty$ cette courbe est tangente à une droite à déterminer.

b3) Déterminer tous les points $X^0 \in I\!R^2$ tels que si $X(t)$ est solution de (2) alors $X(t) \mapsto 0$ si $t \mapsto +\infty$. Justification.

b4) Résoudre le système linéaire non-homogène suivant: trouver $X = (X_1, X_2)^T : I\!R \to I\!R^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que

$$X'(t) = AX(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} \tag{3}$$

avec condition initiale

$$X(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -18 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Montrer que la solution $X(t)$ de ce problème converge, pour $t \to +\infty$, vers une constante $b \in I\!\!R^2$ à calculer. Que représente cette constante b pour le système (3)?

Problème 2.
On considère le système différentiel non-linéaire en dimension 2:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dx}{dt} & = & x(-x-y+10) \\ \\ \frac{dy}{dt} & = & y(-x^2-y^2+16) \end{array} \right. \tag{5}$$

Nous considérons l'ensemble

$$\Omega = \{(x,y) \in I\!\!R^2,\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$

a) Trouver les points d'équilibre appartenant à Ω du système (5). Etudier la stabilité de ces points d'équilibre.
b) Trouver et tracer les $x-$ isocline et $y-$ isocline qui sont dans Ω, du système (5).
c) Déterminer le sense de variation dans Ω de $x(t)$ et $y(t)$ et tracer le portrait de phase dans Ω du système (5).
d) Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$ et $(x(t), y(t))$ solution de (5) avec condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ (on admet l'existence et l'unicité d'une telle solution pour $t \geq 0$). Justifier, en utilisant le portrait de phase, que $(x(t), y(t)) \in \Omega \quad \forall t \geq 0$ et que $(x(t), y(t))$ tend toujours vers un point d'équilibre de (5) pour $t \to +\infty$.

Problème 3.
On considère le système différentiel du type "proie-prédateur" en dimension 2:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dx}{dt} & = & x(1-y) \\ \\ \frac{dy}{dt} & = & y(x-2). \end{array} \right. \tag{6}$$

a) Trouver les solutions stationnaires de ce système.
b) On choisit ici $U =]0, +\infty[^2$ et on se propose de trouver une fonction $E : U \mapsto I\!\!R$ conservée pour le système (6) (c'est à dire: $\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = 0, \forall\, t$ pour toute solution $(x(t), y(t)) \in U$ de (6)). On propose de chercher une telle fonction sous la forme: $E(x,y) = F(x) + G(y)$ avec $F, G :]0, +\infty[\mapsto I\!\!R$ des fonctions de classe C^1 à choisir convenablement. Montrer que si F et G sont tels que

$$xF'(x) = x - 2 \quad \forall\, x > 0 \qquad \text{et} \qquad yG'(y) = y - 1 \quad \forall\, y > 0$$

alors E satisfait la propriété souhaitée. Trouver alors une fonction E conservée pour le système (6).
c) Soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que (x_0, y_0) n'est pas un point d'équilibre de (6) et soit $\alpha = E(x_0, y_0)$. Montrer que la ligne de niveau α de E est une courbe fermée en U. Montrer alors que toute solution de (6) avec condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ est une solution périodique.