Analyse Master 1

Cours de Francis Clarke (2011)

Rappels en topologie

1. Un ordre sur un ensemble non vide P est une rélation $\preccurlyeq$ qui satisfait
   (a) $x \preccurlyeq x \quad \forall x \in P$.
   (b) $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x \implies x = y$.
   (c) $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z \implies x \preccurlyeq z$.

   On dit alors que $(P, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné. Si P est ordonné et $Q \subset P$, alors Q est aussi ordonné par restriction de l'ordre. On dit que Q est *totalement ordonné* si tous ses éléments sont comparables ; c-à-d : $\forall x, y \in Q$, on a $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$.

   Soit $(P, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $Q \subset P$. Un élément $m \in P$ est dit un *majorant* de Q lorsque $q \preccurlyeq m \quad \forall q \in Q$. L'ensemble ordonné $(P, \preccurlyeq)$ est *inductif* si toute partie non vide $Q \subset P$ totalement ordonnée admet un majorant $m \in P$.

   $M \in P$ est un *élément maximal* de P si $x \in P, M \preccurlyeq x \implies x = M$.

   Le *Lemme de Zorn* affirme que tout ensemble ordonné inductif $(P, \preccurlyeq)$ admet un élément maximal.

2. Soit X un ensemble et τ une collection de parties de X. On dit que τ est une *topologie* sur X si :
   (a) $\emptyset \in \tau$ et $X \in \tau$;
   (b) τ est stable par rapport aux intersections finies :
   $$O_i \in \tau \ (i = 1, \ldots, n) \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau;$$
   (c) τ est stable par rapport aux réunions arbitraires :
   $$O_\gamma \in \tau \ (\gamma \in \Gamma) \Longrightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} O_\gamma \in \tau.$$

   Les sous-ensembles de X appartenant à τ sont les *ouverts* de la topologie, et le couple (X, τ) forme un *espace topologique*. Toute partie A de X admet un ouvert maximal O compris dans A ; cet ouvert est *l'intérieur* de A ; il est noté $\operatorname{int} A$ ou A°.

3. Soient (X, τ) un espace topologique et F une partie dans X. On dit que F est *fermé* si $X \backslash F$ est un ouvert (i.e., appartient à τ). Alors toute partie A de X admet un fermé minimal F qui inclut A ; ce fermé est la *fermeture* de A ; il est noté $\overline{A}$.
4. Soient (X, τ) un espace topologique et V une partie dans X. On dit que V est un *voisinage* d'un point x si il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset V$. Le point x est *adhérent* à une partie E si tout voisinage de x contient un point de E. On dit qu'un point x est une *valeur d'adhérence* d'une suite $\{x_n\}$ si pour tout voisinage V de x il existe des indices i arbitrairement grands tels que $x_i \in V$.
   (a) L'ensemble des points adhérents à E (*l'adhérence* de E, notée $\operatorname{adh} E$) coincide avec la fermeture de E : $\operatorname{adh} E = \overline{E}$.
   (b) Soient E un ensemble fermé, $\{x_n\}$ une suite dans E, et x une valeur d'adhérence de cette suite. Alors $x \in E$.
5. Soient (X, τ) un espace topologique et $\mathcal{B}$ une collection d'ouverts dans X. On dit que $\mathcal{B}$ est une *base d'ouverts* de la topologie τ si pour tout ouvert O dans X et tout point $x \in O$ il existe un élément $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset O$.
   (a) Une collection $\mathcal{B}$ de parties de X forme une base d'ouverts d'une topologie τ sur X si et seulement si chaque point $x \in X$ appartient à un élément B de $\mathcal{B}$, et chaque fois qu'un point x appartient à $B_1 \cap B_2$ (où $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$), il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. La topologie engendrée par $\mathcal{B}$ consiste alors de toutes les réunions de parties se trouvant dans $\mathcal{B}$.
   (b) Soit $\mathcal{C}$ une collection de parties de X. Soit $\mathcal{B}$ la collection consistant de X ainsi que toutes les intersections finies d'ensembles dans $\mathcal{C}$. Alors $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts pour la plus faible topologie qui contient $\mathcal{C}$. ($\mathcal{C}$ est alors une *sous-base* pour la topologie.)
6. Soit (X, τ) un espace topologique et x un point dans X. Une collection $\mathcal{B}_x$ d'ouverts contenant x forme une *base locale* en x si pour chaque ouvert O qui contient x il existe $B \in \mathcal{B}_x$ tel que $x \in B \subset O$. La topologie est dite *localement de base dénombrable* si chaque point admet une base locale dénombrable. Elle est dite *de base dénombrable* si elle admet une base d'ouverts dénombrable. On dit que (X, τ) est *séparable* si X contient un ensemble dénombrable *dense* (i.e., dont l'adhérence est égale à X).
   (a) Tout espace métrisable est localement de base dénombrable.
   (b) Un espace de base dénombrable est séparable.
   (c) Un espace métrique est de base dénombrable si et seulement si il est séparable.
   (d) Si X est localement de base dénombrable, alors $x \in \overline{E}$ si et seulement si il existe une suite dans E qui converge vers x. (Ceci est faux en général.)
   (e) Si X est localement de base dénombrable, alors x est une valeur d'adhérence d'une suite $\{x_n\}$ si et seulement si il existe une sous-suite qui converge vers x.

7. Une fonction $f : X \to Y$ (où X et Y sont des espaces topologiques) est dite *continue* en $x \in X$ si pour tout ouvert $\mathcal{O}$ contenant $f(x)$ il existe un ouvert U contenant x tel que $f(U) \subset \mathcal{O}$. La fonction f est dite continue sur X si elle est continue en chaque point de X.
   (a) f est continue si et seulement si $f^{-1}[O]$ est un ouvert dans X pour tout ouvert O dans Y.
   (b) f est continue si et seulement si $f^{-1}[F]$ est un fermé dans X pour tout fermé F dans Y.
   (c) f est continue si et seulement si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout ensemble $A \subset X$.
   (d) Si f est un homéomorphisme (i.e., une bijection telle que f et f^{-1} soient continues), alors
   $$f(\overline{A}) = \overline{f(A)}, \;\; f(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} f(A)$$
   pour tout ensemble $A \subset X$.

   (e) f est continue si et seulement si $f^{-1}[O]$ est un ouvert dans X pour tout ouvert O dans une base d'ouverts de la topologie de Y.
   (f) Soient $\mathcal{B}_x$ une base locale en x et $\mathcal{C}_y$ une base locale en $y := f(x)$. Alors f est continue en x si et seulement si pour tout $C \in \mathcal{C}_y$ il existe $B \in \mathcal{B}_x$ tel que $B \subset f^{-1}[C]$.
8. [Topologie faible] Soit $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une collection de fonctions sur un ensemble X, où les (Y_α, τ_α) sont des espaces topologiques. La *topologie faible* induite par la collection $\mathcal{F}$ est la plus petite topologie sur X qui rend continue chaque fonction f_α ; elle est notée $\sigma(X, \mathcal{F})$.
   (a) Une base pour la topologie $\sigma(X, \mathcal{F})$ consiste de toute intersection finie des ensembles
   $$f_\alpha^{-1}(\mathcal{O}_\alpha) \quad [\alpha \in A, \mathcal{O}_\alpha \in \tau_\alpha].$$
   (b) Si chaque Y_α coïncide avec $\mathbb{R}$, une base pour $\sigma(X, \mathcal{F})$ est donnée par toute intersection finie des ensembles
   $$V(x, f_\alpha, r) := \{x' \in X : |f_\alpha(x') - f_\alpha(x)| < r\} \quad [x \in X, \alpha \in A, r > 0].$$
   (c) Soient Z un espace topologique et $g : Z \to X$ une fonction, X étant muni de la topologie $\sigma(X, \mathcal{F})$. Alors g est continue si et seulement si $f_\alpha \circ g$ est continue pour tout α.
   (d) Une suite $\{x_n\}$ dans X converge vers x pour la topologie $\sigma(X, \mathcal{F})$ si et seulement si $f_\alpha(x_n)$ converge vers $f_\alpha(x)$ pour chaque α dans A. (Ceci motive la terminologie *topologie de la convergence simple*.)

9. Soit f une fonction numérique sur un espace topologique. Alors f est continue si et seulement si tous les ensembles de la forme $\{x : f(x) > a\}$ et $\{x : f(x) < a\}$ sont ouverts.
10. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions continues appliquant un espace topologique dans un espace métrique. Si la suite converge uniformément vers une fonction f, alors f est continue.
11. Un espace topologique X est dit *compact* si tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini.

    (*Attention* : certains auteurs d'un certain pays incluent dans la définition de compact la condition que l'espace soit séparé ; voir ci-dessous.)

    Un espace topologique X est dit *dénombrablement compact* si tout recouvrement ouvert dénombrable admet un sous-recouvrement fini. On dit que X possède la *propriété de Bolzano-Weierstrass* si toute suite dans X admet au moins un point d'adhérence. On dit que l'espace topologique X est *séquentiellement compact* si toute suite dans X admet une sous-suite qui converge vers une limite dans X.

    (a) X possède la propriété de Bolzano-Weierstrass si et seulement si X est dénombrablement compact.

    (b) Un espace séquentiellement compact est dénombrablement compact, et un espace qui est dénombrablement compact et localement de base dénombrable est séquentiellement compact.

    (c) Dans un espace métrique, les notions de compacité, de compacité séquentielle et de compacité dénombrable coincident.

    (d) Un espace métrique qui est compact est séparable.
12. Un espace topologique est *séparé* (ou *de hausdorff*) lorsque deux points distincts quelconques possèdent des voisinages disjoints.

    (a) Une partie fermée dans un espace compact est compact.

    (b) Une partie compact dans un espace séparé est fermé.

    (c) L'image continue d'un compact est compact.

    (d) Une bijection continue d'un compact dans un espace séparé est un homéomorphisme.

    (e) Soit (X, τ) un espace topologique séparé et compact. Alors toute autre topologie sur X strictement plus fine n'est pas compact, et toute autre topologie strictement moins fine n'est pas séparé.
13. Un espace métrique X est *totalement borné* si pour chaque $\epsilon > 0$ il existe une collection finie de boules de rayon ϵ qui recouvre X. Un espace métrique est compact si et seulement si il est complet et totalement borné.

14. Soit f une fonction continue d'un espace métrique compact X dans un espace métrique Y. Alors f est uniformément continue.
15. [Baire] Soit (X, d) un espace métrique complet, et $\{F_n\}$ une suite de fermés dans X telle que $\operatorname{int}\{\cup_n F_n\} \neq \emptyset$. Alors il existe n tel que $\operatorname{int} F_n \neq \emptyset$.
16. [Topologie du produit] Soit $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces topologiques. Sur le produit $\mathcal{P} := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ on définit une topologie en prenant comme base d'ouverts tout ensemble de la forme $\prod_{\alpha \in A} O_\alpha$, où O_α est un ouvert dans X_α, et où $O_\alpha = X_\alpha$ sauf pour un nombre fini d'indices.
    (a) On note π_α la *projection* de $\mathcal{P}$ sur X_α. Alors π_α est continue, et la topologie de $\mathcal{P}$ est la plus faible qui rend chacune des projections continue. Une base d'ouverts pour la topologie consiste de tous les ensembles de la forme
    $$\bigcap_{\alpha \in I} \pi_\alpha^{-1}[O_\alpha],$$
    où I est une partie finie dans A et O_α est un ouvert dans $X_\alpha \quad \forall\, \alpha \in I$.
    (b) Soient Z un espace topologique et $g : Z \to \mathcal{P}$ une fonction. Alors g est continue si et seulement si $\pi_\alpha \circ g$ est continue pour tout α.
    (c) Quand chaque $X_\alpha = X$, on note le produit X^A ; c'est l'ensemble des fonctions de A dans X. Alors une suite $\{f_n\}$ converge vers f dans X^A si et seulement si $f_n(\alpha)$ converge vers $f(\alpha)$ pour chaque α dans A. (Ceci motive la terminologie *topologie de la convergence simple*.)
17. [Tychonov] Soit $\{X_\alpha\}$ une famille d'espaces topologiques compacts. Alors le produit $\prod_\alpha X_\alpha$ est compact.
18. [Ascoli] Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions définies sur un espace topologique X et à valeurs dans un espace métrique (Y, d). $\mathcal{F}$ est dite *équicontinue* en x si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que
    $$d(f(x), f(y)) < \epsilon \quad \forall y \in V, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$
    On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue si $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de X.
    Soit $\mathcal{F}$ une famille équicontinue et $\{f_n\}$ une suite dans $\mathcal{F}$ telle que pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f_n(x) : n \in N^*\}$ soit relativement compact. On suppose en outre l'une des deux hypothèses suivantes :
    (a) X est séparable, ou
    (b) X est compact et l'espace Y est soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.
    Alors il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ qui converge ponctuellement vers une fonction continue f, et la convergence est uniforme sur tout compact de X.

19. Soit X un espace topologique. La fonction $f : X \to]-\infty, \infty]$ est appelée *semicontinue inférieurement* (sci) si pour tout λ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble de niveau $\{x : f(x) > \lambda\}$ est ouvert.
    (a) La somme de deux fonctions sci est sci.
    (b) L'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions sci est sci.
20. Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction sur un espace topologique X. *L'épigraphe* de f, désigné epi f, veut dire l'ensemble
$$\{(x, r) : f(x) \leq r\}.$$
    (a) La fonction f est sci si et seulement si epi f est fermé dans $X \times \mathbb{R}$.
    (b) Si f est sci et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans X convergeant vers x, alors
$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$
    (c) Cette dernière propriété caractérise la semicontinuité inférieure de f si X est un espace métrique.
21. Un espace métrique (X, d) est dit *complet au sens de Cantor* si toute suite décroissante $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0, admet un point $\bar{x} \in X$ tel que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n = \{\bar{x}\}.$$
Alors (X, d) est complet au sens de Cantor si et seulement si (X, d) est complet au sens usuel de Cauchy.