Département Génie Électrique – 3ème année
Exercices de MA1

1 Bases orthonormées

Exercice 1. On considère l'ensemble

$$\ell^2 = \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad : \quad \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

(a) Montrer que l'application

$$(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \overline{y_i}, \quad x, y \in l^2,$$

est un produit scalaire dans ℓ^2.

(b) Montrer que l'ensemble $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$, $e_k \in l^2$, $(e_k)_i = \delta_{k,i}$ est une base orthonormale de ℓ^2.

Exercice 2. Soit V un espace de Hilbert.

(a) Montrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que le produit scalaire est continu, c'est à dire, si $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ alors $\lim_{n\to\infty}(u_n, v) = (u, v), \quad \forall v \in V$.

(b) Soit $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans V telle que

$$\forall i \in \mathbb{N} : (v, e_i) = 0 \implies v = 0.$$

Montrer que $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ forme une base de V, c'est à dire

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} (v, e_i) e_i = v.$$

(c) Refaire la deuxième question de l'exercice précédent en utilisant le résultat démontré ci-dessus.

Exercice 3. On considère l'ensemble

$$\ell^\infty = \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad : \|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} \{|x_i|\} < \infty \right\}.$$

Montrer que la norme $\|.\|_\infty$ n'est pas une norme hilbertienne (n'est pas engendrée par un produit scalaire).

Exercice 4. On désigne par ℓ_N l'espace des suites finies à valeurs complexes $x = (x_0, x_1, ..., x_{N-1})$ avec $x_n \in \mathbb{C}$ pour $n = 0, 1, ..., N-1$, l'espace ℓ_N s'identifie donc à $\mathbb{C}^N$ et c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire canonique

$$(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \overline{y_i}.$$

Pour $k = 0, ..., N-1$, on définit l'élément w_k de ℓ_N par

$$w_k = \left(1, \omega_N^k, \omega_N^{2k}, ..., \omega_N^{(N-1)k}\right), \quad \text{avec} \quad \omega_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

(a) Expliciter les éléments w_k pour $N = 5$.

(b) Montrer que $\{w_k\}_{k=0,...,N-1}$ est une base orthogonale de ℓ_N.

(c) L'élement $x \in \ell_N$ admet donc la décomposition

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k w_k, \quad \text{avec} \quad \hat{x}_k \in \mathbb{C}.$$

Exprimer $\hat{x}_k$ en fonction des composantes x_n de x dans la base canonique.

(d) L'application $x = (x_0, \ldots, x_{N-1}) \mapsto \hat{x} = (\hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_{N-1})$ est appelée transformée de Fourier discrète. Trouver la transformée de Fourier discrète inverse

(e) Quelles sont les matrices associées aux applications $x \mapsto \hat{x}$ et $\hat{x} \mapsto x$?

(f) Calculer $(\hat{x}, \hat{y})$ en fonction de (x, y) pour $x, y \in \ell_N$.

Exercice 5. Soit (e_i) une suite orthonormale dans un espace préhilbertien V et soit $v \in V$. On considère le problème de minimisation

$$\phi(c_0, ..., c_n) = \left\| v - \sum_{i=0}^{n} c_i e_i \right\|^2 = \min!$$

c'est-à-dire on cherche $c_0, \dots, c_n$ pour lesquels l'expression ci-dessus est minimisée. Montrer que la solution est donnée par $c_i = \gamma_i = (v, e_i)$ pour $i = 0, ..., n$. Astuce : poser $u = \sum_{i=0}^{n} c_i e_i$ et montrer que

$$\|u - v\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=0}^{n} |\gamma_i|^2 + \sum_{i=0}^{n} |c_i - \gamma_i|^2.$$

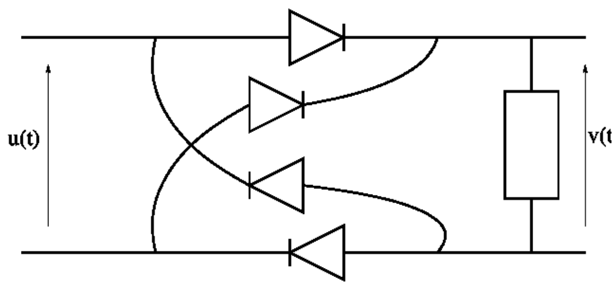
Il est alors évident que la solution est $c_i = \gamma_i$.

Exercice 6. Calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique

$$f(t) = \begin{cases} -k & \text{si} \quad -\pi \le t \le 0 \\ k & \text{si} \quad 0 < t < \pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}, k > 0.$$

Exercice 7. Calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = e^t$ pour $t \in [-\pi, \pi[$.

Exercice 8. On considère le circuit



Soit $u(t) = V \cos(\omega t)$, $V > 0$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T la période.

(a) Quelle est la tension $v(t)$ en sortie et quelle est sa période ?

(b) Développer v en série de Fourier.

(c) Etudier sa convergence.

(d) Calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

Exercice 9. On considère l'équation différentielle

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = r(t),$$

où la fonction r est 2π-périodique et vérifie $r(t) = t^2$ pour $t \in [-\pi, \pi[$ et $\omega \notin \mathbb{N}$.

(a) Développer r en série de Fourier

(b) Calculer les solutions de

$$y_0'' + \omega^2 y_0 = \frac{\pi^2}{3},$$

et

$$y_n'' + \omega^2 y_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nt).$$

Astuce : essayer $y_n = c_n \cos(nt)$.

(c) Donner la solution générale de l'équation différentielle sous la forme d'une série de Fourier.

Exercice 10. Soit $V = C^0[-1,1] = \{f : [-1,1] \to \mathbb{C}; f \text{ continue}\}$ muni du produit scalaire $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, dx$.

(a) Soit $p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$. Montrer que $(p_i, p_k) = 0$ si $i \neq k$, $i,k = 0,1,2$ et calculer $\hat{p}_i = \frac{p_i}{\|p_i\|}$, $i = 0,1,2$.

(b) Soit $f(x) = x^4$ et soit W le sous-espace vectoriel de V engendré par $\hat{p}_i,\ i = 0,1,2$. Calculer la projection de f sur W.

Exercice 11. Soit $V = C^0([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \text{pour} \quad (f,g) \in V^2$$

(a) Montrer que $(.,.)$ est un produit scalaire sur V.

(b) On introduit les polynômes de Tchebychev

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{N}.$$

Montrer que T_n est un polynôme de degré n.

(c) Montrer que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.

(d) Montrer la relation de récurrence

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}.$$

En déduire T_0, T_1, T_2 et T_3.

2 Distributions

Exercice 12. Soient T_1 et T_2 les fonctionnelles définies sur $\mathscr{D}$ par

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(t)\, dt \quad \text{et} \quad \langle T_2, \varphi \rangle = \int_0^1 |\varphi(t)|\, dt$$

T_1 et T_2 sont-elles des distributions ?

Exercice 13. Soit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ une distribution. La distribution ψT est définie par la relation

$$\langle \psi T, \varphi \rangle = \langle T, \psi\varphi \rangle, \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

(a) Montrer que

$$\psi\delta_a = \psi(a)\delta_a.$$

(b) En déduire des expressions simplifiées des deux distributions suivantes

$$T_1 = ((1+t)\cos(t) + \sin(t))\,\delta \quad \text{et} \quad T_2 = \big(t\cos(t) + t^2\sin(t)\big)\,\delta_{\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 14. Soit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que

$$(\psi T)' = \psi' T + \psi T'.$$

(b) En déduire la dérivée de $T = \psi\delta$.

Exercice 15. On considère la fonction

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{t} + 2 & \text{si} \quad t > 0 \\ t^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Calculer la dérivée de T_f au sens des distributions.

Exercice 16. On considère la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [-1/2, 1/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que la suite de distributions $T_n = T_{\{f_n\}}$ où $f_n(t) = nf(nt)$ converge au sens des distribution vers la distribution Dirac δ.

Exercice 17. On souhaite résoudre l'équation $tT = 0$. Soit $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi(0) = 1$.

(a) Montrer que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, la fonction

$$\tilde{\varphi} : t \mapsto \frac{\varphi(t) - \varphi(0)\psi(t)}{t}$$

est continue en zéro.
On admet par la suite que $\tilde{\varphi} \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer qu'il existe une constante C telle que $T = C\delta$.

3 Transformée de Fourier de distributions tempérées

Exercice 18. $T_{\{exp(x^2)\}}$ est-elle une distribution ? une distribution tempérée ? $T_{\{x^2\}}$ est-elle une distribution ? une distribution tempérée ?
Montrer que $T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \delta_n$ est une distribution tempérée.

Exercice 19. Montrer que

$$\mathcal{F}[\delta] = T_{\{1\}} \quad \text{et plus généralement} \quad \mathcal{F}[\delta^{(k)}] = T_{\{(2i\pi t)^k\}}.$$

Exercice 20. Déterminer les transformées de Fourier des distributions

$$T_1 = \delta, \quad T_2 = \delta^{(k)}, \quad T_3 = T_{\{e^{2i\pi f_0 t}\}}, \quad T_4 = T_{\{cos(2\pi f_0 t)\}}, \quad T_5 = T_{\{sin(2\pi f_0 t)\}},$$

où $f_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 21. Soit T une distribution et $a \in \mathbb{R}$, on note $\mu_a T$ la dilaté de T d'un facteur a et définie par

$$\langle \mu_a T, \varphi(x) \rangle = \langle T, \frac{1}{|a|}\varphi(x/a) \rangle.$$

Montrer que

$$\mathcal{F}[\mu_a T] = \frac{1}{|a|}\mu_{1/a}\mathcal{F}[T].$$

Exercice 22. Résoudre l'équation $T' = 0$.
Astuce : Appliquer la transformée de Fourier à l'équation et utiliser le résultat de l'exercice (17).

Exercice 23. Soit la distribution

$$\Delta_P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nP}.$$

On souhaite montrer que

$$\mathcal{F}[\Delta_P] = \frac{1}{P} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n/P}$$

(a) Développer en série de Fourier la fonction P-périodique définie sur $[0, P]$ par $f(t) = t - P/2$.

(b) Etudier la convergence de cette série de Fourier

(c) Nous admettons par la suite que la série de Fourier converge vers $T_{\{f\}}$ au sens des distributions tempérées. Calculer les dérivées de $T_{\{f\}}$ et de la distribution associée à la série de Fourier de f.

(d) En déduire le résultat souhaité.