

TP6

Exercice 1

```

> restart;
> with(Groebner):
> f1:=X^2+Y^2+Z^2+1;
                                 $f1 := X^2 + Y^2 + Z^2 + 1$ 
> f2:=X^2+2*Y^2-Y*Z-1;
                                 $f2 := X^2 + 2 Y^2 - YZ - 1$ 
> f3:=X+Z^3-1;
                                 $f3 := X + Z^3 - 1$ 
> id:=[f1,f2,f3]; # liste représentant l'idéal engendré par f1,f2,
f3
                                 $id := [X^2 + Y^2 + Z^2 + 1, X^2 + 2 Y^2 - YZ - 1, X + Z^3 - 1]$ 
> gb:=map(e->sort(e,[X,Y,Z],plex),Basis(id,plex(X,Y,Z)));
gb := [Z12 - 4 Z9 + 5 Z8 + 12 Z6 - 10 Z5 + 5 Z4 - 16 Z3 + 18 Z2 + 16, 4 Y - Z11 + 4 Z8 - 5 Z7
      - 8 Z5 + 10 Z4 - 5 Z3 + 8 Z2 - 10 Z, X + Z3 - 1]

> f4:=X^3+2*X*Y-2;
                                 $f4 := X^3 + 2 YX - 2$ 
> idp:=[op(id),f4];
                                 $idp := [X^2 + Y^2 + Z^2 + 1, X^2 + 2 Y^2 - YZ - 1, X + Z^3 - 1, X^3 + 2 YX - 2]$ 
> gbp:=Basis(idp,plex(X,Y,Z)); # le système n'a pas de solution
                                 $gbp := [1]$ 

```

Exercice 2

```

> restart;
> with(Groebner):
> f1:=3*X^2*Y-Y*Z;
                                 $f1 := 3 X^2 Y - YZ$ 
> f2:=X*Y^2+Z^4;
                                 $f2 := X Y^2 + Z^4$ 
> G:=Basis([f1,f2],plex(X,Y,Z));
                                 $G := [Y^4 Z - 3 Z^8, Y^2 Z + 3 Z^4 X, X Y^2 + Z^4, 3 X^2 Y - YZ]$ 

```

```

> f:=3*X^4*Z-2*X^3*Y^4+7*X^2*Y^2*Z^2-8*X*Y^3*Z^2;
      f:=3 X^4 Z-2 X^3 Y^4+7 X^2 Y^2 Z^2-8 X Y^3 Z^2
=
> r:=NormalForm(f,G,plex(X,Y,Z),'q');
      r:=3 X^4 Z+8 Z^6 Y+2/3 Y^2 Z^5+7/3 Y^2 Z^3
=
> q;
      [-2/3 X, 2/3 X Y^2-2/3 Z^4-7/3 Z^2, -2 X^2 Y^2+7 Z^2 X-8 Z^2 Y, 0]
(1)

```

[Exercice 3.

```

> restart;

> with(Groebner):
> with(plots):
> vars:=[U,V,X,Y,Z];
      vars := [U, V, X, Y, Z]
(2)

```

on considère l'idéal suivant formé à partir des équations paramétriques de la surface

```

> F:= [X-U*V,Y-U*V^2,Z-U^2];
      F := [X-U V, Y-U V^2, Z-U^2]
(3)

```

on calcule une base de Gröbner pour un ordre d'élimination des indéterminées (U,V)

```

> G:=Basis(F,plex(U,V,X,Y,Z));
G := [-Z Y^2+X^4, Y Z V-X^3, X V-Y, -X^2+Z V^2, -X^2+Y U, -Z V+X U, -X+U V, -Z
      +U^2]
(4)

```

et on détermine l'idéal d'élimination

```

> GE:=remove(e->has(e,{U,V}),G);
      GE := [-Z Y^2+X^4]
(5)

```

d'où l'équation cartésienne de la surface

```

> H:=op(GE);
      H := -Z Y^2+X^4
(6)

```

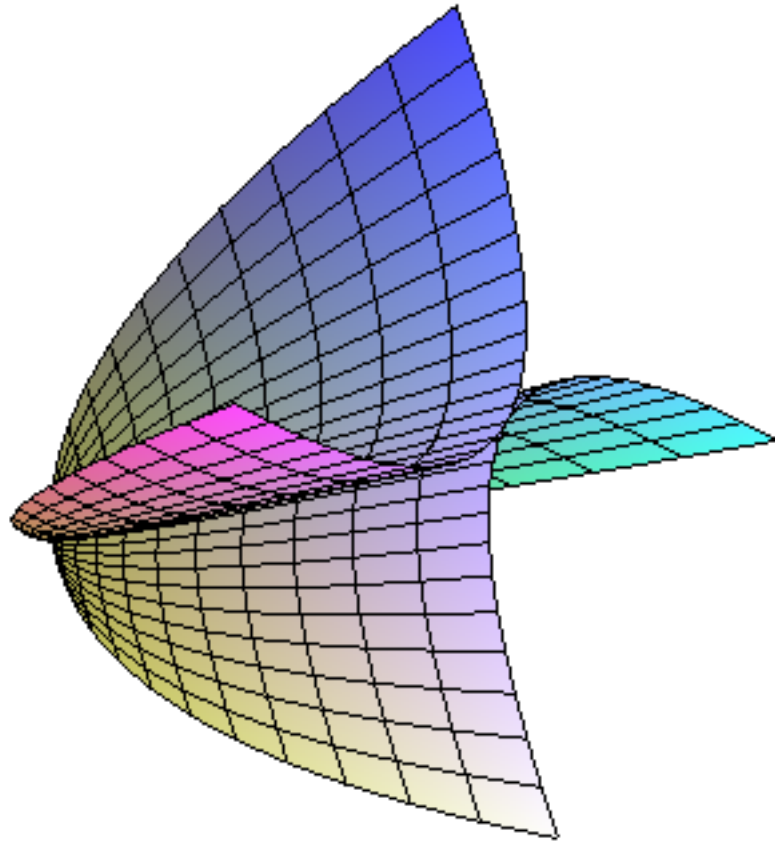
on remarquera les les points (0,c,0) vérifient l'équation cartésienne mais ne correspondent pas à des valeurs des paramètres

complément: pour représenter graphiquement la surface:

```

> plot3d([u*v,u*v^2,u^2],u=-1..1,v=-1..1);

```



[exercice 4

```
[> with(Groebner):
> G := [Y^2-Z*X, Y*X-Z, X^2-Y];
      G := [Y^2 - ZX, YX - Z, X^2 - Y] (7)
```

```
[> S12:=SPolynomial(G[1],G[2],tdeg(X,Y,Z));
      S12 := -ZX^2 + YZ (8)
```

```
[> NormalForm(S12,G,tdeg(X,Y,Z));
      0 (9)
```

```
[> S13:=SPolynomial(G[1],G[3],tdeg(X,Y,Z));
      S13 := -X^3Z + Y^3 (10)
```

```
[> NormalForm(S13,G,tdeg(X,Y,Z));
      0 (11)
```

```

> S23:=SPolynomial(G[2],G[3],tdeg(X,Y,Z));
      S23 := Y2 - Z X
(12)

```

```

> NormalForm(S23,G,tdeg(X,Y,Z));
      0
(13)

```

Le critère de Buchberger est vérifié; on a une base de Gröbner

```

> G:=[X*Y^2-X*Z+Y,X*Y-Z^2,X-Y*Z^4];
      G := [X Y2 - Z X + Y, Y X - Z2, X - Y Z4]
(14)

```

```

> S12:=SPolynomial(G[1],G[2],plex(X,Y,Z));
      S12 := -Z X + Y + Y Z2
(15)

```

```

> NormalForm(S12,G,plex(X,Y,Z));
      -Y Z5 + Y + Y Z2
(16)

```

Ici le critère n'est donc pas vérifié.