Université Claude Bernard LYON 1
Master MAIM Mathématiques générales
Algèbre et calcul formel

TD 1

Exercice 1.

Soient $f, g \in K[X]$ de degrés respectifs m et n ; on considère l'application K-linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \partial_{f,g}^{m,n} \ : \ K[X]_{\leq n-1} \oplus K[X]_{\leq m-1} & \longrightarrow & K[X]_{\leq m+n-1} \\ (u,v) & \longrightarrow & u\,f + v\,g \end{array}$$

Déterminer l'image et le noyau de $\partial_{f,g}^{m,n}$.

Exercice 2.

1. Soit $f = \sum_{i=1}^{m} a_i X^i \in K[X]$ de degré m ; on considère l'application K-linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \epsilon_f^{m,n} \ : \ K[X]_{\leq m+n-1} & \longrightarrow & K[X]_{\leq n-1} \oplus K[X]_{\leq m-1} \\ h & \longrightarrow & (q,r) \end{array}$$

   où, pour tout $h \in K[X]$ q et r sont le quotient et le reste de la division euclidienne de h par f.
   Montrer que $\epsilon_f^{m,n}$ est bijective et calculer $\det(\epsilon_f^{m,n})$.
2. Pour tout $g \in K[X]$ de degré n, on considère l'application K-linéaire :

$$\begin{array}{rcl} m_g : K[X]/\langle f \rangle & \longrightarrow & K[X]/\langle f \rangle \\ \overline{h} & \longrightarrow & \overline{gh} \end{array}$$

   Montrer que
$$\det(m_g) = \det(\mu_g)$$
   où $\mu_g : K[X]_{\leq m-1} \longrightarrow K[X]_{\leq m-1}$ est l'application K-linéaire définie par la condition que, $\mu_g(h)$ est le reste de la division euclidienne de gh par f pour tout $h \in K[X]_{\leq m-1}$.
3. En déduire que :
$$R_X(f,g) = a_m^n \det(m_{\overline{g}})$$

Exercice 3.

1. Considérons un corps K et $f \in K[X]$;
   (a) Si K est de caractéristique nulle on a $f' = 0$ si et seulement si f est constant.
   (b) Si K est de caractéristique p on a $f' = 0$ si et seulement s'il existe $g \in K[X]$ avec $f = g(X^p)$.
   (c) Si K est parfait de caractéristique p on a $f' = 0$ si et seulement s'il existe $g \in K[X]$ avec $f = g^p$.
2. On suppose K de caractéristique nulle ou parfait de caractéristique p ; oient $f, g \in K[X]$ avec g irréductible ; on suppose que $g^k | f$ mais que $g^{k+1} \not| f$; montrer que :

(a) si $p \not| k$ on a $g^{k-1} | f'$ mais que $g^k \not| f'$.

(b) si $p | k$ on a $g^k | f'$.

3. Montrer que

   (a) Si f et f' sont premiers entre eux montrer que f est sans facteurs multiples.

   (b) Supposons K de caractéristique nulle ou parfait de caractéristique p ; si f est sans facteurs multiples montrer que f et f' sont premiers entre eux,

4. Soit $f \in K[X]$, exprimer $\mathrm{pgcd}(f, f')$ en fonction de la décomposition de f en facteurs irréductibles dans les cas où K est de caractéristique nulle ou parfait de caractéristique p. Exprimer la partie sans facteur multiple de f lorsque K est de caractéristique nulle.

5. Montrer que l'on a les conditions équivalentes suivantes :

   (a) f et f' sont premiers entre eux.

   (b) f est sans facteurs multiples dans $L[X]$ pour toute K-extension L.

   (c) f est séparable

6. (a) Si K est de caractéristique nulle ou parfait de caractéristique p montrer que les conditions précédentes équivalents à ce que f n'a pas de facteur multiple.

   (b) Soit $K = \mathbb{F}_p(T)$; vérifier que le polynôme $f = X^p - T \in K[X]$ est sans facteur multiple mais n'est pas séparable.