

TD 2

Exercice 1.

Etant donnés des polynômes non nuls $f = \sum_{j=0}^m a_j X^j$ et $g = \sum_{j=0}^n b_j X^j$ de degrés m et n avec $m \geq n$, à coefficients dans un corps K , considérons l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} A_1 &= f \\ A_2 &= g \\ A_1 &= Q_1 A_2 + A_3 \text{ avec } \deg(A_3) < \deg(A_2) \\ &\vdots \\ A_k &= Q_k A_{k+1} + A_{k+2} \text{ avec } \deg(A_{k+2}) < \deg(A_{k+1}) \\ &\vdots \\ A_{t-2} &= Q_{t-2} A_{t-1} + A_t \text{ avec } \deg(A_t) < \deg(A_{t-1}) \\ A_{t-1} &= Q_{t-1} A_t \text{ avec } \deg(A_t) < \deg(A_{t-1}) \end{aligned}$$

$(Q_1, \dots, Q_{t-1}, A_t)$ est la *représentation euclidienne* du couple de polynômes (f, g) .

Les *quotients successifs* de l'algorithme d'Euclide permettent de retrouver la fraction rationnelle :

$$\frac{f}{g} = Q_1 + \frac{1}{Q_2 + \frac{1}{Q_3 + \dots + \frac{1}{Q_{t-1}}}}$$

et si on rajoute le pgcd $A_t = \text{pgcd}(f, g)$ on retrouve les polynômes f et g .

On posera $n_k = \deg(A_k)$ pour $1 \leq k \leq t$, $d_k = \deg(Q_k)$ pour $1 \leq k \leq t-1$ et $d_t = n_t$.

1. Montrer que $\deg(A_k) = \sum_{j=k}^t d_j$.
2. Soient $A, B \in K[X]$ des polynômes non nuls; on considère la division euclidienne $A = BQ + R$ de A par B ; montrer que si $R \neq 0$ on a :

$$R_X(A, B) = (-1)^{\deg(A) \deg(B)} \text{lc}(B)^{\deg(A) - \deg(R)} R_X(B, R)$$

indication utiliser la *formule de Poisson* (cours chap 1 prop 2 ou fiche TD1 ex2 3.)

3. En déduire que pour $1 \leq k \leq t-2$ on a :

$$R_X(A_k, A_{k+1}) = (-1)^{n_k n_{k+1}} \text{lc}(A_{k+1})^{n_k - n_{k+2}} R_X(A_{k+1}, A_{k+2})$$

4. Montrer que, pour f et g premiers entre eux, on a :

$$R_X(f, g) = (-1)^\sigma A_t^{m+n} \prod_{k=2}^{t-1} \text{lc}(Q_k)^{s_k}$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} n_k &= \sum_{i=k}^t d_i \text{ pour } 1 \leq k \leq t \\ \sigma &= \sum_{i=1}^{t-2} n_i n_{i+1} \\ s_k &= d_1 + 2 \sum_{i=2}^{k-1} d_i + d_k \text{ pour } 2 \leq k \leq t-1 \end{aligned}$$

Exercice 2.

Soient $f, g \in A[X]$ de même degré n où A est un anneau intègre ;

1. Montrer que :

$$P_{X,Y}^n(f, g) = \frac{f(X)g(Y) - f(Y)g(X)}{X - Y} \in A[X, Y]$$

est un polynôme tel que :

$$\text{degpm}(P_{X,Y}^n(f, g)) = \max(\text{deg}_X(P_{X,Y}^n(f, g)), \text{deg}_Y(P_{X,Y}^n(f, g))) \leq n - 1$$

On posera

$$P_{X,Y}^n(f, g) = \sum_{i,j=0}^{n-1} c_{i,j} X^i Y^j$$

la matrice de Bezout est la matrice :

$$B_X^n(f, g) = (c_{n-i, n-j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

2. On pose

$$V(X) = (X^{n-1}, \dots, X, 1) \in K[X]^n$$

Vérifier que dans $K[X, Y]$ on a :

$$P_{X,Y}^n(f, g) = V(X) B_X^n(f, g) {}^t V(Y)$$

3. On considère la matrice *co-identité*

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\det(J_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{[n/2]}$$

4. Montrer que :

$$S_X^{n,n}(f, g) \begin{pmatrix} 0 & J_n \\ -J_n & 0 \end{pmatrix} {}^t S_X^{n,n}(f, g) = \begin{pmatrix} 0 & B_X^n(f, g) \\ -B_X^n(f, g) & 0 \end{pmatrix}$$

indication : on pourra multiplier les deux membres de cette égalité à gauche par $U(X)$ et à droite par $U(Y)$ avec

$$U(X) = (X^{2n-1}, \dots, X, 1) = (X^n V(X), V(X)) \in K[X]^{2n}$$

5. En conclure que :

$$\det(B_X^n(f, g))^2 = R_X(f, g)^2$$

6. Montrer que :

$$B_X^n(X^n, X^n + 1) = J_n$$

7. On considère les polynômes

$$\mathfrak{F} = \sum_{i=0}^n A_i X^i \quad \mathfrak{G} = \sum_{j=0}^n B_j X^j$$

dont les coefficients sont des *indéterminées* sur \mathbb{Z} ; vérifier que :

$$R_X(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) = \epsilon \det(B_n(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})) \text{ avec } \epsilon \in \{-1, 1\}$$

8. Montrer que :

$$\det(B_X^n(f, g)) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R_X(f, g)$$

pour tout $f, g \in A[X]$.