Université Claude Bernard LYON 1
Master MAIM Mathématiques générales
Algèbre et calcul formel

TD 3

Exercice 1.

Soient $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i X^i, g = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j X^j \in K[X]$ des polynômes de même degré n ; on considère la forme bilinéaire symétrique à deux indéterminées X et Y :

$$\mathfrak{B}(X,Y) = \frac{\begin{vmatrix} f(X) & f(Y) \\ g(X) & g(Y) \end{vmatrix}}{X - Y} = \sum_{i,j=0}^{n-1} c_{i,j} X^i Y^j$$

1. On pose :

$$[i,j] = a_i b_j - a_j b_i \text{ pour } 0 \leq i,j \leq n$$

   Montrer que :

$$c_{i,j} = \sum_{k=0}^{\min(j,n-i-1)} [k+i+1, j-k] \text{ pour } 0 \leq i,j \leq n-1$$

2. Montrer que

$$R_X(f,g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det(C_X^n(f,g))$$

   (formule de Bezout-Cayley) où $C_X^n(f,g) = (c_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n-1}$.

Exercice 2.

Soient $f = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i X^i \in K[X]$ et $g = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j X^j \in K[X]$ de degrés respectifs $m = \deg(f)$ et $n = \deg(g)$ et Δ leur *pgcd* de degré d. On considère H la *forme échelonnée réduite en colonnes* de la matrice de Sylvester $S_X^{m,n}(f,g)$. A chaque colonne $C_j(H)$ de H correspond le polynôme

$$P_j = \sum_{i=1}^{m+n} H_{i,j} X^{m+n-i} \in K[X]_{\leq m+n-1}$$

1. Montrer que $P_j = 0$ pour $r+1 \leq j \leq m+n$ où $r = m+n-d$.
2. Montrer que $(P_j)_{1 \leq j \leq r}$ est la base *échelonnée réduite* de l'image de la matrice de Sylvester.
3. Montrer que pour $1 \leq j \leq r$, P_j est unitaire, multiple de Δ et que :

$$d \leq \deg(P_j) \leq m+n-j = d+r-j$$

4. Montrer que $P_r = \Delta$.
5. Montrer que l'on a

$$P_j = X^{d+r-j} + R_{1,j} X^{d-1} + \cdots + R_{i,j} X^{d-i} + \cdots + R_{d,j} = \Delta Q_j$$

   avec $Q_j \in K[X]_{\leq r-1}$ unitaire de degré $r-j$:

$$Q_j = X^{r-j} + q_{r-j-1,j} X^{r-j-1} + \cdots + q_{i,j} X^i + \cdots + q_{0,j}$$

6. Montrer que, pour $1 \leq j \leq r-1$, les $r-j$ coefficients $q_{0,j}, \cdots, q_{r-j-1,j}$ du polynôme Q_j sont les solutions du système de $r-j$ équations linéaires :

$$
\begin{gathered}
c_{d-1} + q_{r-j-1,j} = 0 \\
c_{d-2} + q_{r-j-1,j} c_{d-1} + q_{r-j-2,j} = 0 \\
\vdots \\
c_{d-i} + q_{r-j-1,j} c_{d-i+1} + \cdots + q_{r-j-i+1,j} c_{d-1} + q_{r-j-i} = 0 \\
\vdots \\
c_{d-r+j} + q_{r-j-1,j} c_{d-r+j+1} + \cdots + q_{1,j} c_{d-1} + q_0 = 0
\end{gathered}
$$