Université Claude Bernard LYON 1
Master MAIM Mathématiques générales
Algèbre et calcul formel

Corrigé de la fiche de TD 3

Exercice 1.

Soient $f = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i, g = \sum_{j=1}^{n} b_j X^j \in K[X]$ des polynômes de même degré n ; on considère la forme bilinéaire symétrique à deux indéterminées X et Y :

$$\mathfrak{B}(X,Y) = \frac{\begin{vmatrix} f(X) & f(Y) \\ g(X) & g(Y) \end{vmatrix}}{X-Y} = \sum_{i,j=0}^{n-1} c_{i,j} X^i Y^j$$

1. On pose :
$$[i,j] = a_i b_j - a_j b_i \text{ pour } 0 \le i,j \le n$$
Montrer que :
$$c_{i,j} = \sum_{k=0}^{\min(j,n-i-1)} [k+i+1, j-k] \text{ pour } 0 \le i,j \le n-1$$
2. Montrer que
$$R_X(f,g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det(C_X^n(f,g))$$
(formule de Bezout-Cayley).

Corrigé.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{f(X)g(Y) - f(Y)g(X)}{X-Y} &= \sum_{i,j}^{n} a_i b_j \frac{X^i Y^j - Y^i X^j}{X-Y} \\
&= \sum_{0 \le j < i \le n} [i,j] X^j Y^j \frac{X^{i-j} - Y^{i-j}}{X-Y} \\
&= \sum_{0 \le j < i \le n} [i,j] X^j Y^j \sum_{k=0}^{i-j-1} X^{i-j-1-k} Y^k \\
&= \sum_{0 \le j < i \le n} \sum_{k=0}^{i-j-1} [i,j] X^{i-1-k} Y^{k+j}
\end{aligned}$$

On remarque ensuite que l'application $(i,j,k) \longrightarrow (i-1-k, k+j, k)$ est une bijection de l'ensemble des triplets (i,j,k) d'entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} 0 \le j \le n-1 \\ j+1 \le i \le n \\ 0 \le k \le i-j-1 \end{cases}$$

sur l'ensemble des triplets (p, q, k) d'entiers naturels tels que

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq n-1 \\ 0 \leq q \leq n-1 \\ 0 \leq k \leq q \\ 0 \leq k \leq n-p-1 \end{cases}$$

de sorte que l'on obtient :

$$\frac{f(X)g(Y) - f(Y)g(X)}{X - Y} = \sum_{p,q=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\min(q,n-p-1)} [k+p+1, q-k]\, X^p Y^q$$

Enfin les matrices $C_X^n(f,g) = (c_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n-1}$ et $B_X^n(f,g) = (c_{n-i,n-j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont obtenues en inversant la numérotation des lignes et de colonnes et sont donc conjuguées par la matrice de permutation π_σ avec $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Comme cette permutation est d'ordre 2 on a [1]

$$\det(C_X^n(f,g)) = \det(\pi_\sigma^{-1} B_X^n(f,g)\pi_\sigma) = \det(B_X^n(f,g)) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R_X(f,g)$$

Exercice 2.

Soient $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \in K[X]$ et $g = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j \in K[X]$ de degrés respectifs $m = \deg(f)$ et $n = \deg(g)$ et Δ leur *pgcd* de degré d. On considère H la *forme échelonnée réduite en colonnes* de la matrice de Sylvester $S_X^{m,n}(f,g)$. A chaque colonne $C_j(H)$ de H correspond le polynôme

$$P_j = \sum_{i=1}^{m+n} H_{i,j} X^{m+n-i} \in K[X]_{\leq m+n-1}$$

1. Montrer que $P_j = 0$ pour $r+1 \leq j \leq m+n$ où $r = m+n-d$.
2. Montrer que $(P_j)_{1 \leq j \leq r}$ est la base *échelonnée réduite* de l'image de la matrice de Sylvester.
3. Montrer que pour $1 \leq j \leq r$, P_j est unitaire, multiple de Δ et que :
$$d \leq \deg(P_j) \leq m+n-j = d+r-j$$
4. Montrer que $P_r = \Delta$.
5. Montrer que l'on a
$$P_j = X^{d+r-j} + R_{1,j} X^{d-1} + \cdots + R_{i,j} X^{d-i} + \cdots + R_{d,j} = \Delta Q_j$$
avec $Q_j \in K[X]_{\leq r-1}$ unitaire de degré $r-j$:
$$Q_j = X^{r-j} + q_{r-j-1,j} X^{r-j-1} + \cdots + q_{i,j} X^i + \cdots + q_{0,j}$$
6. Montrer que, pour $1 \leq j \leq r-1$, les $r-j$ coefficients $q_{0,j}, \cdots, q_{r-j-1,j}$ du polynôme Q_j sont les solutions du système de $r-j$ équations linéaires :
$$\begin{gathered} c_{d-1} + q_{r-j-1,j} = 0 \\ c_{d-2} + q_{r-j-1,j} c_{d-1} + q_{r-j-2,j} = 0 \\ \vdots \\ c_{d-i} + q_{r-j-1,j} c_{d-i+1} + \cdots + q_{r-j-i+1,j} c_{d-1} + q_{r-j-i} = 0 \\ \vdots \\ c_{d-r+j} + q_{r-j-1,j} c_{d-r+j+1} + \cdots + q_{1,j} c_{d-1} + q_0 = 0 \end{gathered}$$

1. compte tenu de l'exercice 2 de la fiche TD2

Corrigé.

La matrice de Sylvester est de rang $r = m + n - d$; l'application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} K[X]_{\leq r-1} & \longrightarrow & \mathrm{Im}(\partial_{f,g}) \\ h & \longrightarrow & \Delta h \end{array}$$

est bijective.

Les polynômes associés aux *colonnes non nulles* de H forment une base de $\mathrm{Im}(\partial_{f,g})$; on a donc $P_j = 0$ pour $r+1 \leq j \leq m+n$ et $(P_j)_{1\leq j\leq r}$ est la base *échelonnée réduite* de $\mathrm{Im}(\partial_{f,g})$. En particulier, pour $1 \leq j \leq r$, P_j est unitaire, multiple de Δ de sorte que l'on a :

$$d \leq \deg(P_j) \leq m + n - j = d + r - j$$

Ainsi la matrice H est de la forme :

$$H = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 \\ R & 0 \end{pmatrix}$$

avec $R \in \mathbf{M}_{d,r}(K)$.
et l'on a :

$$P_j = X^{d+r-j} + R_{1,j}X^{d-1} + \cdots + R_{i,j}X^{d-i} + \cdots + R_{d,j} = \Delta Q_j$$

avec $Q_j \in K[X]_{\leq r-1}$ unitaire de degré $r - j$:

$$Q_j = X^{r-j} + q_{r-j-1,j}X^{r-j-1} + \cdots + q_{i,j}X^i + \cdots + q_{0,j}$$

En particulier pour $j = r$ on a $Q_r = 1$ et $P_r = \Delta = X^d + c_{d-1}X^{d-1} + \cdots + c_0$.
Pour $1 \leq j \leq r-1$, les $r - j$ coefficients $q_{0,j}, \cdots, q_{r-j-1,j}$ du polynôme Q_j sont les solutions du système des $r - j$ équations linéaires obtenu en annulant les coefficients de degré compris entre d et $d + r - j - 1$ du produit $Q_j\Delta$. On obtient donc le système :

$$\begin{gathered} c_{d-1} + q_{r-j-1,j} = 0 \\ c_{d-2} + q_{r-j-1,j}c_{d-1} + q_{r-j-2,j} = 0 \\ \vdots \\ c_{d-i} + q_{r-j-1,j}c_{d-i+1} + \cdots + q_{r-j-i+1,j}c_{d-1} + q_{r-j-i} = 0 \\ \vdots \\ c_{d-r+j} + q_{r-j-1,j}c_{d-r+j+1} + \cdots + q_{1,j}c_{d-1} + q_0 = 0 \end{gathered}$$

que l'on résoud de proche en proche.
Par exemple considérons :

$$\begin{array}{rcl} f & = & X^4 - 4\,X^3 - X^2 + 16\,X - 12 \\ g & = & X^3 + 2\,X^2 - X - 2 \end{array}$$

La matrice de Sylvester est :

$$S_X^{4,3}(f,g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 16 & -1 & -4 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -12 & 16 & -1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -12 & 16 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Le *pgcd* de f et g est

$$\Delta = X^2 + X - 2$$

de sorte que $r = 5$. On a alors :

$$\begin{aligned}
Q_5 &= 1 \\
Q_4 &= X - 1 \\
Q_3 &= X^2 - X + 3 \\
Q_2 &= X^3 - X^2 + 3\,X - 5 \\
Q_1 &= X^4 - X^3 + 3\,X^2 - 5\,X + 11
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
P_5 &= X^2 + X - 2 \\
P_4 &= X^3 - 3\,X + 2 \\
P_3 &= X^4 + 5\,X - 6 \\
P_2 &= X^5 - 11\,X + 10 \\
P_1 &= X^6 + 21\,X - 22
\end{aligned}$$

et la forme échelonnée réduite (en colonnes) de la matrice de Sylvester est :

$$H = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
21 & -11 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
-22 & 10 & -6 & 2 & -2 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$