Université Claude Bernard LYON 1
Master MA Mathématiques générales
Algèbre et calcul formel

TD 6

Exercice 1.
Soient $X_1, \cdots, X_n$ des indéterminées ; quel est le coefficient de T^n dans la série entière

$$S = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1 - X_i T)}$$

En déduire, pour un entier $d \geq 1$, une construction de l'ensemble $\mathbb{F}_1[X_1, \cdots, X_n]^{[d]}$ des monômes de degré total d .
Comment obtenir cet ensemble avec SAGE ou MAPLE ?

Exercice 2.
Montrer que $\mathrm{Card}(\mathbb{F}_1[X_1, \cdots, X_n]^{[d]}) = C_{n+d-1}^{\,d}$ où $\mathbb{F}_1[X_1, \cdots, X_n]^{[d]}$ est l'ensemble des monômes de degré total d.

Exercice 3.

1. Montrer que l'ordre lexicographique est caractérisé par la condition suivante : pour tout polynôme $f \in K[X_1, \cdots, X_n]$, si $\mathrm{lm}(f) \in K[X_r, \cdots, X_n]$ on a $f \in K[X_r, \cdots, X_n]$.
2. Montrer l'ordre gradué lexicographique-inverse est caractérisé par la condition suivante : l'ordre est plus fin que celui donné par le degré total et pour tout polynôme homogène $f \in K[X_1, \cdots, X_n]$, si $\mathrm{lm}(f) \in \langle X_r, \cdots, X_n \rangle$ on a $f \in \langle X_r, \cdots, X_n \rangle$.

Remarque : Attention à la distinction entre l'appartenance à la *sous-algèbre* $K[X_r, \cdots, X_n]$ engendrée par $X_r, \cdots, X_n$ et à l'*idéal* $\langle X_r, \cdots, X_n \rangle$ engendré par $X_r, \cdots, X_n$.

Exercice 4.
Effectuer *à la main* la division multivariée de $f = 2\,X^3 - Y^2 - 4\,XY - 2\,X^2Y + X - XY^2 + 4$ par $[g_1 = 2\,X^2 + Y, g_2 = XY + 1]$ pour l'ordre *lexicographique*
Vérifier les résultats avec SAGE ou MAPLE.