Université Claude Bernard LYON 1
Master MA Mathématiques générales
Algèbre et calcul formel

Corrigé de la fiche de TD 6

Exercice 1.
Soient $X_1, \cdots, X_n$ des indéterminées ; quel est le coefficient de T^n dans la série entière

$$S = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1 - X_i T)}$$

En déduire, pour un entier $d \geq 1$, une construction de l'ensemble $\mathbb{F}_1[X_1, \cdots, X_n]^{[d]}$ des monômes de degré total d .
Comment obtenir cet ensemble avec SAGE ou MAPLE ?
Corrigé.

$$S_d = \sum_{M \in \mathbb{F}_1[X_1, \cdots, X_n]^{[d]}} M$$

la somme des monômes de degré d ; on a

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - X_i T} = \sum_{d=0}^{\infty} S_d T^d$$

Voir à la fin les feuilles de calcul SAGE et MAPLE

Exercice 2.
Montrer que $\mathrm{Card}(\mathbb{F}_1[X_1, \cdots, X_n]^{[d]}) = C_{n+d-1}^{\,d}$ où $\mathbb{F}_1[X_1, \cdots, X_n]^{[d]}$ est l'ensemble des monômes de degré total d.
Corrigé.
On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - X_i T} &= \prod_{i=1}^{n} \sum_{\alpha_i=1}^{\infty} X_i^{\alpha_i} T^{\alpha_i} \\
&= \sum_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n} X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} T^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \\
&= \sum_{d=0}^{\infty} \Big(\sum_{|\alpha|=d} X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \Big) T^d \\
&= \sum_{d=0}^{\infty} S_d T^d
\end{aligned}$$

De plus

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{M}(X_1, \cdots, X_n)^d) = S_d(1, \cdots, 1)$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\frac{1}{(1 - T)^n} = \sum_{d=0}^{\infty} C_{n+d-1}^{\,d} T^d$$

Pour $n = 1$ c'est l'identité :
$$\frac{1}{1-T} = \sum_{d=0}^{\infty} T^d$$
Supposons, par hypothèse de récurrence, que :
$$\frac{1}{(1-T)^{n-1}} = \sum_{d=0}^{\infty} C_{n+d-2}^{\,d} T^d$$
En dérivant, on obtient que :
$$\begin{aligned} \frac{d}{dT}\frac{1}{(1-T)^{n-1}} &= \frac{n-1}{(1-T)^n} \\ &= \sum_{d=1}^{\infty} d C_{n+d-2}^{\,d} T^{d-1} \end{aligned}$$
de sorte que :
$$\frac{1}{(1-T)^n} = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{d+1}{n-1} C_{n+d-1}^{\,d+1} T^d$$
Or on a :
$$\frac{d+1}{n-1} C_{n+d-1}^{\,d+1} = C_{n+d-1}^{\,d}$$

Exercice 3.

Montrer que l'ordre lexicographique est caractérisé par la condition suivante : pour tout polynôme $f \in K[X_1, \cdots, X_n]$, si $\mathrm{lm}(f) \in K[X_r, \cdots, X_n]$ on a $f \in K[X_r, \cdots, X_n]$.
Montrer l'ordre gradué lexicographique-inverse est caractérisé par la condition suivante : l'ordre est plus fin que celui donné par le degré total et pour tout polynôme homogène $f \in K[X_1, \cdots, X_n]$, si $\mathrm{lm}(f) \in \langle X_r, \cdots, X_n \rangle$ on a $f \in \langle X_r, \cdots, X_n \rangle$.
Remarque.
Il faut bien faire la distinction entre l'appartenance à la *sous-algèbre* $K[X_r, \cdots, X_n]$ engendrée par $X_r, \cdots, X_n$ et à l'*idéal* $\langle X_r, \cdots, X_n \rangle$ engendré par $X_r, \cdots, X_n$.
Corrigé.
caractérisation de l'ordre plex :
Notons $\preceq$ l'ordre *plex* ; soit $f \in K[X_1, \cdots, X_n]$ tel que $M = \mathrm{lm}(f) \in K[X_r, \cdots, X_n]$. On a $M = X_r^{\alpha_r}. \cdots .X_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha_r \geq 1$. Soit $N = X_1^{\beta_1}. \cdots .X_n^{\beta_n} \neq M$ un monôme figurant dans f on a $N \prec M$. S'il existait un indice i avec $1 \leq i \leq r-1$ avec $\beta_i \geq 1$ on aurait $N \succ M$ de sorte que $N = X_r^{\beta_r}. \cdots .X_n^{\beta_n}$. On a donc $f \in K[X_r, \cdots, X_n]$.
Considérons réciproquement un ordre admissible $\preceq$ vérifiant la propriété de l'énoncé.
Soient $M = X_s^{\alpha_s}. \cdots .X_n^{\alpha_n}$ et $N = X_s^{\beta_s}. \cdots .X_n^{\beta_n}$ des monômes tels que $\alpha_s < \beta_s$; supposons que l'on ait $M \succ N$; puisque l'ordre est admissible on a $X_{s+1}^{\alpha_{s+1}}. \cdots .X_n^{\alpha_n} \succ X_s^{\beta_s - \alpha_s}.X_{s+1}^{\beta_{s+1}}. \cdots .X_n^{\beta_n}$.
Considérons alors le polynôme $f = X_{s+1}^{\alpha_{s+1}}. \cdots .X_n^{\alpha_n} + X_s^{\beta_s - \alpha_s}.X_{s+1}^{\beta_{s+1}}. \cdots .X_n^{\beta_n}$; puisque l'on a $\mathrm{lm}_{\prec}(f) = X_{s+1}^{\alpha_{s+1}}. \cdots .X_n^{\alpha_n} \in K[X_{s+1}, \cdots, X_n]$ on a aussi $f \in K[X_{s+1}, \cdots, X_n]$ et $\beta_s - \alpha_s = 0$ contrairement à l'hypothèse. On a donc :
$$\alpha_s < \beta_s \Rightarrow M \prec N$$
Il en résulte que si $M = X_1^{\alpha_1}. \cdots .X_n^{\alpha_n}$ et $N = X_1^{\beta_1}. \cdots .X_n^{\beta_n}$ sont des monômes tels que $\alpha_i = \beta_i$ pour $1 \leq i \leq s-1$ et $\alpha_s < \beta_s$ on a $M \prec N$.

Réciproquement supposons que l'on a des monômes $M = X_1^{\alpha_1}.\cdots.X_n^{\alpha_n}$ et $N = X_1^{\beta_1}.\cdots.X_n^{\beta_n}$ tels que $M \prec N$. Soit s tel que $\alpha_i = \beta_i$ pour $1 \leq i \leq s-1$ et $\alpha_s \neq \beta_s$; on a donc :

$$M' = X_s^{\alpha_s}.\cdots.X_n^{\alpha_n} \prec N' = X_s^{\beta_s}.\cdots.X_n^{\beta_n}$$

et par suite $\alpha_s < \beta_s$ (sinon on aurait $\alpha_s > \beta_s$ et donc $M' \succ N'$). Ainsi l'ordre $\preceq$ est l'ordre *plex*.
caractérisation de l'ordre tdeg :
Notons $\preceq$ l'ordre *tdeg* ; soit $f \in K[X_1, \cdots, X_n]$ un polynôme *homogène* de degré d tel que $M = \mathrm{lm}(f) \in \langle X_r, \cdots, X_n\rangle$. On a $M = X_1^{\alpha_1}.\cdots.X_n^{\alpha_n}$ de sorte qu'il existe un indice $s \geq r$ tel que $\alpha_s \geq 1$. Soit $N = X_1^{\beta_1}.\cdots.X_n^{\beta_n} \neq M$ un monôme figurant dans f on a $N \prec M$ et N est de degré total d. Si on avait $N \notin \langle X_r, \cdots, X_n\rangle$, on aurait $\beta_r = \cdots = \beta_n = 0$ et par suite $N \succ M$. On a donc $f \in \langle X_r, \cdots, X_n\rangle$.
Considérons réciproquement un ordre admissible $\preceq$ vérifiant la propriété de l'énoncé.
Soient $M = X_1^{\alpha_1}.\cdots.X_n^{\alpha_n}$ et $N = X_1^{\beta_1}.\cdots.X_n^{\beta_n}$ des monômes tels que $|\alpha| = |\beta|$; on suppose que $\alpha_i = \beta_i$ pour $s+1 \leq i \leq n$ et $\alpha_s > \beta_s$. Les monômes $M' = X_1^{\alpha_1}.\cdots.X_{s-1}^{\alpha_{s-1}}X_s^{\alpha_s-\beta_s}$ et $N' = X_1^{\beta_1}.\cdots.X_{s-1}^{\beta_{s-1}}$ sont de même degré et l'on a $M' \in \langle X_s, \cdots, X_n\rangle$. Si l'on avait $M' \succ N'$, le polynôme homogène $f = M' + N'$ aurait M' comme monôme dominant et l'on aurait donc $f \in \langle X_r, \cdots, X_n\rangle$ et par suite $N' \in \langle X_s, \cdots, X_n\rangle$ ce qui n'est pas. On a donc $M' \prec N'$ et par suite $M \prec N$.
Réciproquement soient $M = X_1^{\alpha_1}.\cdots.X_n^{\alpha_n}$ et $N = X_1^{\beta_1}.\cdots.X_n^{\beta_n}$ des monômes tels que $|\alpha| = |\beta|$ et $M \prec N$. Soit s le plus grand indice tel que $\alpha_s \neq \beta_s$. On a alors $\alpha_s > \beta_s$ (sinon on aurait $\alpha_s < \beta_s$ et par suite $M \succ N$). Ainsi l'ordre $\preceq$ est l'ordre *tdeg*.

Exercice 4.
Effectuer *à la main* la division multivariée de $f = 2\,X^3 - Y^2 - 4\,XY - 2\,X^2Y + X - XY^2 + 4$ par $[g_1 = 2\,X^2 + Y, g_2 = XY + 1]$ pour l'ordre *lexicographique*
Vérifier les résultats avec SAGE ou MAPLE.
Corrigé.
Ci-dessous la *division à la main* pour la disposition de l'opération. *Ensuite avec Maple on retrouve bien le résultat. enfin on constate que la fonction reduce() de SAGE ne donne pas la division myltivariée (quand le diviseur n'est pas une base de Grôbner au moins). on remarque que la condition 3) de la division multivariée n'est pas vérifiée.*

$$f = 2X^3 - 2X^2Y - XY^2 - 4XY + X - Y^2 + 4 \quad \Big| \quad g_1 = 2X^2 + 1, \quad g_2 = XY + 1$$

$$-2X^3 \qquad -X$$

$$-2X^2Y - XY^2 - 4XY - Y^2 + 4 \qquad q_1 = X - Y$$

$$2X^2Y \qquad +Y$$

$$-XY^2 - 4XY - Y^2 + Y + 4 \qquad q_2 = -Y - 4$$

$$XY^2 \qquad +Y$$

$$-4XY - Y^2 + 2Y + 4$$

$$4XY \qquad +4$$

$$-Y^2 + 2Y + 8 = r$$

```
> with(Groebner):
> f:=2*X^3-Y^2-4*X*Y-2*X^2*Y+X-X*Y^2+4;
```

$$f := 2\,X^3 - 2\,X^2\,Y - X\,Y^2 - 4\,X\,Y - Y^2 + X + 4 \tag{1}$$

```
> g1:=2*X^2+1;
```

$$g1 := 2\,X^2 + 1 \tag{2}$$

```
> g2:=X*Y+1;
```

$$g2 := X\,Y + 1 \tag{3}$$

```
> r:=NormalForm(f,[g1,g2],plex(X,Y),'q');
```

$$r := -Y^2 + 2\,Y + 8 \tag{4}$$

```
> q;
```

$$[X - Y, -Y - 4] \tag{5}$$

```
> evalb(f=expand(q[1]*g1+q[2]*g2)+r);
```

$$\mathit{true} \tag{6}$$

division

```
A = PolynomialRing(QQ,2,'XY',order='lex')
(X,Y) = A.gens()
```

```
f = 2*X^3-Y^2-4*X*Y-2*X^2*Y+X-X*Y^2+4
f
```

```
2*X^3 - 2*X^2*Y - X*Y^2 - 4*X*Y + X - Y^2 + 4
```

```
g1 = 2*X^2+1
g1
```

```
2*X^2 + 1
```

```
g2 = X*Y+1
g2
```

```
X*Y + 1
```

```
r = f.reduce([g1,g2])
r
```

```
2*X - Y^2 + Y + 8
```

```
q =(f-r).lift([g1,g2])
```

```
q[0]
```

```
-X^2*Y - X*Y^2 - Y
```

```
q[1]
```

```
2*X^3 + 2*X^2*Y - X - 4
```

```
f - (q[0]*g1+q[1]*g2+r)
```

```
0
```

```
(q[0]*g1).lm() < f.lm()
```

```
False
```

```
q[1]*g2.lm() < f.lm()
```

```
False
```

engendre monomes

Engendrement des monômes

```
n = 3
A = PolynomialRing(ZZ, ['X%s'%i for i in range(1,n+1)])
show(A)
```

$$\mathbf{Z}[X_1, X_2, X_3]$$

```
vars= A.gens()
vars
```

```
(X1, X2, X3)
```

```
d = 5
P.<T> = PowerSeriesRing(A,d+1)
show(P)
```

$$\mathbf{Z}[X_1, X_2, X_3][[T]]$$

```
F = 1/mul([1-v*T for v in vars])
F
```

```
1 + (X1 + X2 + X3)*T + (X1^2 + X1*X2 + X2^2 + X1*X3 + X2*X3 +
X3^2)*T^2 + (X1^3 + X1^2*X2 + X1*X2^2 + X2^3 + X1^2*X3 + X1*X2*X3
X2^2*X3 + X1*X3^2 + X2*X3^2 + X3^3)*T^3 + (X1^4 + X1^3*X2 +
X1^2*X2^2 + X1*X2^3 + X2^4 + X1^3*X3 + X1^2*X2*X3 + X1*X2^2*X3 +
X2^3*X3 + X1^2*X3^2 + X1*X2*X3^2 + X2^2*X3^2 + X1*X3^3 + X2*X3^3 +
X3^4)*T^4 + (X1^5 + X1^4*X2 + X1^3*X2^2 + X1^2*X2^3 + X1*X2^4 + X2
+ X1^4*X3 + X1^3*X2*X3 + X1^2*X2^2*X3 + X1*X2^3*X3 + X2^4*X3 +
X1^3*X3^2 + X1^2*X2*X3^2 + X1*X2^2*X3^2 + X2^3*X3^2 + X1^2*X3^3 +
X1*X2*X3^3 + X2^2*X3^3 + X1*X3^4 + X2*X3^4 + X3^5)*T^5 + O(T^6)
```

```
Ft = F.truncate()
Ft
```

```
(X1^5 + X1^4*X2 + X1^3*X2^2 + X1^2*X2^3 + X1*X2^4 + X2^5 + X1^4*X3
X1^3*X2*X3 + X1^2*X2^2*X3 + X1*X2^3*X3 + X2^4*X3 + X1^3*X3^2 +
X1^2*X2*X3^2 + X1*X2^2*X3^2 + X2^3*X3^2 + X1^2*X3^3 + X1*X2*X3^3 +
X2^2*X3^3 + X1*X3^4 + X2*X3^4 + X3^5)*T^5 + (X1^4 + X1^3*X2 +
X1^2*X2^2 + X1*X2^3 + X2^4 + X1^3*X3 + X1^2*X2*X3 + X1*X2^2*X3 +
X2^3*X3 + X1^2*X3^2 + X1*X2*X3^2 + X2^2*X3^2 + X1*X3^3 + X2*X3^3 +
X3^4)*T^4 + (X1^3 + X1^2*X2 + X1*X2^2 + X2^3 + X1^2*X3 + X1*X2*X3
X2^2*X3 + X1*X3^2 + X2*X3^2 + X3^3)*T^3 + (X1^2 + X1*X2 + X2^2 +
X1*X3 + X2*X3 + X3^2)*T^2 + (X1 + X2 + X3)*T + 1
```

```
Sd = [M for M in Ft.coeffs() if M.degree()==d][0]
Sd
```

```
X1^5 + X1^4*X2 + X1^3*X2^2 + X1^2*X2^3 + X1*X2^4 + X2^5 + X1^4*X3
```

```
X1^3*X2*X3 + X1^2*X2^2*X3 + X1*X2^3*X3 + X2^4*X3 + X1^3*X3^2 +
X1^2*X2*X3^2 + X1*X2^2*X3^2 + X2^3*X3^2 + X1^2*X3^3 + X1*X2*X3^3 +
X2^2*X3^3 + X1*X3^4 + X2*X3^4 + X3^5
```

```
Fd = Sd.monomials()
Fd
```

```
[X1^5, X1^4*X2, X1^3*X2^2, X1^2*X2^3, X1*X2^4, X2^5, X1^4*X3,
X1^3*X2*X3, X1^2*X2^2*X3, X1*X2^3*X3, X2^4*X3, X1^3*X3^2,
X1^2*X2*X3^2, X1*X2^2*X3^2, X2^3*X3^2, X1^2*X3^3, X1*X2*X3^3,
X2^2*X3^3, X1*X3^4, X2*X3^4, X3^5]
```

```
len(Fd) == binomial(n+d-1,d)
```

```
True
```

Monômes

```
> n:=3;
```

$$n := 3 \tag{1}$$

```
> vars:=[seq(X[i], i=1..n)];
```

$$vars := [X_1, X_2, X_3] \tag{2}$$

```
> d:=5;
```

$$d := 5 \tag{3}$$

```
> F:=series(mul(1/(1-vars[i]*T),i=1..n),T,d+1);
  ;
```

$$F := 1 + (X_1 + X_2 + X_3)\,T + \left(X_1^2 - (-X_1 - X_2)\,X_2 - (-X_1 - X_2 - X_3)\,X_3\right)T^2 + \left(X_1^3 - \left(-X_1^2 - X_1 X_2 - X_2^2\right)X_2 - \left(-X_1^2 - X_1 X_2 - X_1 X_3 - X_2^2 - X_2 X_3 - X_3^2\right)X_3\right)T^3 + \left(X_1^4 - \left(-X_1^3 - X_1^2 X_2 - X_1 X_2^2 - X_2^3\right)X_2 - \left(-X_1^3 - X_1^2 X_2 - X_1^2 X_3 - X_1 X_2^2 - X_1 X_2 X_3 - X_1 X_3^2 - X_2^3 - X_2^2 X_3 - X_2 X_3^2 - X_3^3\right)X_3\right)T^4 + \left(X_1^5 - \left(-X_1^4 - X_1^3 X_2 - X_1^2 X_2^2 - X_1 X_2^3 - X_2^4\right)X_2 - \left(-X_1^4 - X_1^3 X_2 - X_1^3 X_3 - X_1^2 X_2^2 - X_1^2 X_2 X_3 - X_1^2 X_3^2 - X_1 X_2^3 - X_1 X_2^2 X_3 - X_1 X_2 X_3^2 - X_1 X_3^3 - X_2^4 - X_2^3 X_3 - X_2^2 X_3^2 - X_2 X_3^3 - X_3^4\right)X_3\right)T^5 + \mathrm{O}(T^6) \tag{4}$$

```
> Ft:=collect(expand(convert(F,polynom)),T);
```

$$Ft := 1 + \left(X_1^5 + X_1^4 X_2 + X_1^4 X_3 + X_1^3 X_2^2 + X_1^3 X_2 X_3 + X_1^3 X_3^2 + X_1^2 X_2^3 + X_1^2 X_2^2 X_3 + X_1^2 X_2 X_3^2 + X_1^2 X_3^3 + X_1 X_2^4 + X_1 X_2^3 X_3 + X_1 X_2^2 X_3^2 + X_1 X_2 X_3^3 + X_1 X_3^4 + X_2^5 + X_2^4 X_3 + X_2^3 X_3^2 + X_2^2 X_3^3 + X_2 X_3^4 + X_3^5\right)T^5 + \left(X_1^4 + X_1^3 X_2 + X_1^3 X_3 + X_1^2 X_2^2 + X_1^2 X_2 X_3 + X_1^2 X_3^2 + X_1 X_2^3 + X_1 X_2^2 X_3 + X_1 X_2 X_3^2 + X_1 X_3^3 + X_2^4 + X_2^3 X_3 + X_2^2 X_3^2 + X_2 X_3^3 + X_3^4\right)T^4 + \left(X_1^3 + X_1^2 X_2 + X_1^2 X_3 + X_1 X_2^2 + X_1 X_2 X_3 + X_1 X_3^2 + X_2^3 + X_2^2 X_3 + X_2 X_3^2 + X_3^3\right)T^3 + \left(X_1^2 + X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_2^2 + X_2 X_3 + X_3^2\right)T^2 + (X_1 + X_2 + X_3)\,T \tag{5}$$

```
> Sd:=coeff(Ft,T,d);
```

$$Sd := X_1^5 + X_1^4 X_2 + X_1^4 X_3 + X_1^3 X_2^2 + X_1^3 X_2 X_3 + X_1^3 X_3^2 + X_1^2 X_2^3 + X_1^2 X_2^2 X_3 + X_1^2 X_2 X_3^2 + X_1^2 X_3^3 + X_1 X_2^4 + X_1 X_2^3 X_3 + X_1 X_2^2 X_3^2 + X_1 X_2 X_3^3 + X_1 X_3^4 + X_2^5 + X_2^4 X_3 + X_2^3 X_3^2 + X_2^2 X_3^3 + X_2 X_3^4 + X_3^5 \tag{6}$$

```
> Fd:=convert(Sd,list);
```

$$Fd := \left[X_1^5, X_1^4 X_2, X_1^4 X_3, X_1^3 X_2^2, X_1^3 X_2 X_3, X_1^3 X_3^2, X_1^2 X_2^3, X_1^2 X_2^2 X_3, X_1^2 X_2 X_3^2, X_1^2 X_3^3, X_1 X_2^4, X_1 X_2^3 X_3, X_1 X_2^2 X_3^2, X_1 X_2 X_3^3, X_1 X_3^4, X_2^5, X_2^4 X_3, X_2^3 X_3^2, X_2^2 X_3^3, X_2 X_3^4, X_3^5\right] \tag{7}$$

```
> evalb(nops(Fd)=binomial(n+d-1,d));
>
```

$$true \tag{8}$$