Université Claude Bernard LYON 1
Master MA Mathématiques générales
Algèbre et calcul formel

TD 7

Exercice 1.
Soient $f_1, \cdots, f_r \in K[X_1, \cdots, X_n]$; on désigne par I l'idéal de $K[X_1, \cdots, X_n]$ engendré par $f_1, \cdots, f_r$ et $J = I \cap K[X_1, \cdots, X_{n-1}]$ l'idéal d'élimination. Montrer que :

$$Z(J) = \pi(Z(I)) \cup (Z(J) \cap Z(\varphi_1, \cdots, \varphi_r))$$

avec $\varphi_i = \mathrm{lc}_{X_n}(f_i) \in K[X_1, \cdots, X_{n-1}]$ pour $1 \leq i \leq n$.

Exercice 2.
On considère des polynômes $f_i \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ pour $1 \leq i \leq r$. On désigne par $Z_{\mathbb{C}}(f_1, \cdots, f_r)$ (*resp.* $Z_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1, \cdots, f_r)$) l'ensemble des zéros de $f_1, \cdots, f_r$ dans $\mathbb{C}^n$ (*resp.* dans $\overline{\mathbb{Q}}^n$). Pour tout entier premier p, soit $\pi_p : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_p$ le morphisme canonique ; on désigne par $Z_{\overline{\mathbb{F}_p}}(f_1, \cdots, f_r)$ l'ensemble des zéros de $\pi_p(f_1), \cdots, \pi_p(f_r)$ dans $\overline{\mathbb{F}_p}^n$.

1. Montrer que si $Z_{\mathbb{C}}(f_1, \cdots, f_r) = \emptyset$, il existe $N \geq 1$ tel que pour tout entier premier $p > N$ on a $Z_{\overline{\mathbb{F}_p}}(f_1, \cdots, f_r) = \emptyset$.
2. On suppose que $Z_{\mathbb{C}}(f_1, \cdots, f_r) \neq \emptyset$.
   (a) Montrer que $Z_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1, \cdots, f_r) \neq \emptyset$
   (b) Montrer qu'il existe une solution $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec x_i, $1 \leq i \leq n$, entier sur l'anneau $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{D}]$ avec $D \geq 1$.
   (c) Montrer que l'anneau $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{D}]$ est principal.
   (d) Montrer que $B = A[x_1, \cdots, x_n]$ est un A-module libre de type fini.
   (e) Montrer que pour p premier, $p > D$, $B \neq pB$ et que si $\mathfrak{m} \supset pB$ est un idéal maximal de B contenant pB alors $K_p = B/\mathfrak{m}$ est une $\mathbb{F}_p$-extension de degré fini.
   (f) En déduire que $Z_{\overline{\mathbb{F}_p}}(f_1, \cdots, f_r) \neq \emptyset$ pour $p > D$.
   (g) En conclure que $Z_{\mathbb{C}}(f_1, \cdots, f_r) = \emptyset$ si et seulement si $Z_{\overline{\mathbb{F}_p}}(f_1, \cdots, f_r) = \emptyset$ pour $p >> 0$.