Université Claude Bernard LYON 1
Master MAIM Mathématiques générales
Algèbre et calcul formel

TD 8

Exercice 1.

1. Soit $\mathcal{C}$ une courbe algébrique *complexe* irréductible ; montrer que l'ensemble des *points singuliers* de $\mathcal{C}$ est fini.
2. Que remarque-t-on si la courbe n'est pas irréductible ?
3. Montrer que la courbe d'équation $f = Y^3 - 3X^2 - 2Y^2 + Y$ est irréductible et déterminer ses points singuliers. quelle est leur nature ?

Exercice 2.

1. Soit A un anneau euclidien ; montrer que le sous-groupe $\mathrm{SL}_m(A)$ de $\mathrm{GL}_m(A)$ formé des matrices M telles que $\det(M) = 1$ est engendré par les matrices *élémentaires* $X_{i,j}^{(m)}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant égal à 1 (*i.e.* telles que $ad - bc = 1$).
2. Le résultat subsiste-t-il lorsque A est un anneau principal *général* ?
3. Soit A un anneau euclidien ; montrer que le groupe $\mathrm{SL}_m(A)$ est engendré par les matrices élémentaires suivantes :
   (a) les matrices de *transvection* :
$$X_{i,j}^{(m)}(s) = \mathrm{Id} + sE_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & \cdots & s & \cdots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
   avec $1 \leq i \neq j \leq m$.
   (b) les matrices diagonales de déterminant 1 :
$$\mathrm{Diag}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$
   pour $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in (K^*)^m$ avec $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

   Remarques : Rappelons que
$$P_{i,j}^{(m)} = X_{i,j}^{(m)}(1).X_{j,i}^{(m)}(-1).X_{i,j}^{(m)}(1)$$
   est une matrice de transposition au *signe près*.
   Le résultat ne subsiste pas pour un anneau principal *général*.