

corrigé du TD 8

Exercice 1.

1. Soit $\mathcal{C}$ une courbe algébrique *complexe* irréductible ; montrer que l'ensemble des *points singuliers* de $\mathcal{C}$ est fini.
2. Que remarque-t-on si la courbe n'est pas irréductible ?
3. Montrer que la courbe d'équation $f = Y^3 - 3X^2 - 2Y^2 + Y$ est irréductible et déterminer ses points singuliers. quelle est leur nature ?

Corrigé :

1. Soit $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ une équation de $\mathcal{C}$; l'ensemble des points singuliers est $Z(f, \frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y})$. Comme f n'est pas constant, au moins l'un des deux polynômes $\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}$ n'est pas nul. Si ces deux polynômes sont constants *ie.* si $a = \frac{\partial f}{\partial X} \quad b = \frac{\partial f}{\partial Y}$ on a $f = aX + bY$ et il n'y a pas de point singulier. Supposons alors que le polynôme $\frac{\partial f}{\partial Y}$ ne soit pas constant ; alors il est premier avec f Pour tout facteur irréductible g de $\frac{\partial f}{\partial Y}$ l'ensemble $Z(f, g)$ est fini, il en résulte que $Z(f, \frac{\partial f}{\partial Y})$ est fini et *a fortiori* $Z(f, \frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y})$ est fini.
2. Supposons que (x, y) soit dans deux composantes irréductibles ; on peut écrire $f = gh$ avec g et h sans facteur commun, $g(x, y) = 0$ et $h(x, y) = 0$. on a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial X}(x, y) = \frac{\partial(gh)}{\partial X}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial X}(x, y)h(x, y) + g(x, y)\frac{\partial h}{\partial X}(x, y) = 0$$

et de même $\frac{\partial f}{\partial Y}(x, y) = 0$.

3. On a $f(X, Y+1) = Y^3 - 3X^2 + Y^2 = g$ et la courbe $Z(f)$ est irréductible si et seulement si la courbe $Z(g)$ l'est. Supposons que $g = (Y+a)(Y^2+bY+c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}[X]$. On a alors $g = Y^3 + (a+b)Y^2 + (ab+c)Y + ac$ d'où la système :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ab+c=0 \\ ac=-3X^2 \end{cases}$$

on a alors $a^2b = 3X^2$ d'où $2\deg(a) + \deg(b) = 2$ mais $\deg(a) = \deg(b)$ d'où $3\deg(a) = 2$ ce qui n'est pas possible. Ainsi g , et donc f est irréductible.

On a $\frac{\partial f}{\partial X} = -6X$ et $\frac{\partial f}{\partial Y} = 3Y^2 - 4Y + 1$ Les points singuliers sont donc les solutions du système

$$\begin{cases} Y^3 - 3X^2 - 2Y^2 + Y \\ -6X \\ 3Y^2 - 4Y + 1 \end{cases}$$

On trouve donc le point de coordonnées $x = 0$ et $y = 1$.

Il faut donc déterminer la partie principale du développement de Taylor de f en $(0, 1)$ donc de g en $(0, 0)$. Regardons d'abord l'ordre 2 :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial X \partial Y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial Y^2} = -3X^2 + Y^2 = (Y - \sqrt{3}X)(Y + \sqrt{3}X)$$

Le *cône tangent* en $(0, 1)$ à la courbe $\mathcal{C}$ est donc la réunion des 2 droites concourantes en ce point $Y - \sqrt{3}X - 1$ et $Y + \sqrt{3}X - 1$. On a donc un point double ordinaire.

Exercice 2.

1. Soit A un anneau euclidien ; montrer que le sous-groupe $\mathrm{SL}_m(A)$ de $\mathrm{GL}_m(A)$ formé des matrices M telles que $\det(M) = 1$ est engendré par les matrices *élémentaires* $X_{i,j}^{(m)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant égal à 1 (*i.e.* telles que $ad - bc = 1$).

2. Le résultat subsiste-t-il lorsque A est un anneau principal *général* ?

3. Soit A un anneau euclidien ; montrer que le groupe $\mathrm{SL}_m(A)$ est engendré par les matrices élémentaires suivantes :

- (a) les matrices de *transvection* :

$$X_{i,j}^{(m)}(s) = \mathrm{Id} + sE_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & \cdots & s & \cdots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

avec $1 \leq i \neq j \leq m$.

- (b) les matrices diagonales de déterminant 1 :

$$\mathrm{Diag}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in (K^*)^m$ avec $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Remarques : Rappelons que

$$P_{i,j}^{(m)} = X_{i,j}^{(m)}(1).X_{j,i}^{(m)}(-1).X_{i,j}^{(m)}(1)$$

est une matrice de transposition au *signe près*.

Le résultat ne subsiste pas pour un anneau principal *général*.

Corrigé :

1. Soit $M \in \mathbf{SL}_m(A)$; on a $S = U.M.V$ avec U et V produits de matrices de la forme

$$X_{i,j}^{(m)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & a & \cdots & b & \cdots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & c & \cdots & d & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

a, b sont sur la ligne i ; c, d sur la ligne j ; a, c sur la colonne i et b, d sur la colonne j ; les coefficients de la diagonale autres que a, d sont égaux à 1).

pour $1 \leq i < j \leq m$ et $a, b, c, d \in A$ avec $\det(X_{i,j}^{(m)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc = 1$

et S matrice de la forme de Smith. Les termes diagonaux de S sont alors des éléments inversibles de A et en multipliant par des matrices de la forme $X_{i,j}^{(m)} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$ avec u inversible dans A on se ramène à l'identité.

2. Le résultat est vrai pour A principal mais n'est plus *effectif*.

3. Montrons d'abord le résultat pour des matrices carrées de taille $m = 2$. On considère donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc = 1$.

Supposons $b \neq 0$. (sinon M est triangulaire). Remarquons que $P_{1,2}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Supposons $a = 0$ ou bien $\phi(a) < \phi(b)$: on a $M P_{1,2}^{(2)} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$ Si $a \neq 0$ (sinon on est ramené à une matrice triangulaire) on peut *supposer* que M est telle que $\phi(a) \geq \phi(b)$.

On a alors $a = bq + r$ avec $r = 0$ ou $\phi(r) < \phi(b)$. et $M X_{2,1}^{(2)}(-q) = \begin{pmatrix} a - bq & b \\ c - dq & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & b \\ * & d \end{pmatrix}$

et finalement $M X_{2,1}^{(2)}(-q) P_{1,2}^{(2)} = \begin{pmatrix} b & r \\ d & * \end{pmatrix}$.

Si $r \neq 0$ (ie. si la matrice obtenue n'est pas triangulaire) on peut réitérer l'étape précédente mais comme on obtient une suite $\phi(b) > \phi(r) > \cdots$ *strictement décroissante* on obtient une matrice *triangulaire* T en un nombre fini d'étapes.

Alors si $T = \begin{pmatrix} u & 0 \\ * & v \end{pmatrix}$ avec $uv = 1$ on a $T \text{Diag}(u^{-1}, v^{-1}) = X_{2,1}^{(2)}(u^{-1}*)$.

Considérons maintenant le cas $m \geq 3$. On a :

$$X_{i,j}^{(m)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = P_{i,j}^{(m)} \quad X_{i,j}^{(m)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} = X_{i,j}^{(m)}(s) \quad X_{i,j}^{(m)} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \text{Diag}(\lambda)$$

avec $\lambda = (1, \dots, u, 1, \dots, v, 1, \dots)$. On a alors le résultat compte tenu du cas $m = 2$, du fait que $\mathbf{SL}_m(A)$ est engendré par les matrices $X_{i,j}^{(m)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et du fait que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow X_{i,j}^{(m)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est un homomorphisme de groupes $\mathbf{SL}_2(A) \longrightarrow \mathbf{SL}_m(A)$.