

Fiche de TP 1

Exercice 1.

On considère les polynômes

$$f = X^8 + X^6 - 3X^4 - 3X^3 + 8X^2 + 2X - 5 \text{ et } 3X^6 + 5X^4 - 4X^2 - 9X + 21$$

1. Effectuer la division euclidienne de f par g
2. Vérifier que f et g sont premiers entre eux.
3. Ecrire la formule de Bezout $Af + Bg = 1$.
4. Calculer le résultant R de f et g
5. Vérifier que $af + bg = R$ avec $a = RA$ et $b = RB$.
6. Que remarquez-vous ?

Exercice 2.

Pour chacun des couples f, g de polynômes suivants de $A[X]$ où $A = \mathbb{Z}[t]$:

1. $f = tX^2 + 3X - 1$ et $g = 6X^2 + t^2 - 4$
2. $f = tX^2 + 3tX - 1$ et $g = 6X^2 + t^2 - 4$
3. $f = tX^2 + X - 1$ et $g = tX^2 + X + t^2 - 4$

calculer le résultant R de f et g par rapport à X puis comparer $R(0)$ et la valeur du résultant par rapport à X des polynômes spécialisés $f_{t \rightarrow 0}$ et $g_{t \rightarrow 0}$.
Justifier les différents résultats obtenus.

Exercice 3.

On considère les polynômes $f = X^4 + Y^4 - 1$ et $g = X^5Y^2 - 4X^3Y^3 + X^2Y^5 - 1$.

1. Représenter, sur un même dessin, les courbes planes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ d'équations $f = 0$ et $g = 0$.
2. Calculer le résultant $R \in \mathbb{Q}[X]$ de f et g relativement à Y . Expliquer pourquoi les racines de R sont les abscisses des points d'insertion des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
3. En déduire des *valeurs approchées* des abscisses de ces points d'intersection
4. En remarquant que les courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice, calculer des *valeurs approchées* des coordonnées de ces points d'intersection.