Université Claude Bernard LYON 1
Master MAIM Mathématiques générales
Algèbre et calcul formel

Commentaires sur la fiche de TP 1

Exercice 1.
On considère les polynômes

$$f = X^8 + X^6 - 3X^4 - 3X^3 + 8X^2 + 2X - 5 \text{ et } 3X^6 + 5X^4 - 4X^2 - 9X + 21$$

1. Effectuer la division euclidienne de f par g
2. Vérifier que f et g sont premiers entre eux.
3. Ecrire la formule de Bezout $A\,f + B\,g = 1$.
4. Calculer le résultant R de f et g
5. Vérifier que $a\,f + b\,g = R$ avec $a = R\,A$ et $b = R\,B$.
6. Que remarquez-vous ?

Commentaires
question 6 : il faut remarquer que dans la formule de Bezout usuelle (de la question 3) les coefficients A et B sont dans $\mathbb{Q}[X]$ (*ie* ont des dénominateurs) bien que les polynômes f et g soient à coefficients dans $\mathbb{Z}$ alors que dans la formule 6. les coefficients a et b sont entiers ; on a donc une formule de Bezout *sans dénominateur*. Ceci illustre la prop 3 du chap I.

Exercice 2.
Pour chacun des couples f, g de polynômes suivants de $A[X]$ où $A = \mathbb{Z}[t]$:

1. $f = tX^2 + 3X - 1$ et $g = 6X^2 + t^2 - 4$
2. $f = tX^2 + 3tX - 1$ et $g = 6X^2 + t^2 - 4$
3. $f = tX^2 + X - 1$ et $g = tX^2 + X + t^2 - 4$

calculer le résultant R de f et g par rapport à X puis comparer $R(0)$ et la valeur du résultant par rapport à X des polynômes spécialisés $f_{t\to 0}$ et $g_{t\to 0}$.
Justifier les différents résultats obtenus.
Commentaires
Cet exercice illustre le théorème de spécialisation du résultant prop 4 du chap 1
On a $f, g \in \mathbb{Z}[t][X]$ et on considère le morphisme d'anneaux $\phi : \mathbb{Z}[t] \longrightarrow \mathbb{Z}$ d'évaluation en $t = 0$.

1. le degré de f chute de $k = 1$ tandis que le degré de g ne chute pas. On a donc :
$$\phi(R_X(f,g)) = (-1)^{2.2}\phi(R_X(g,f)) = \mathrm{lc}(g)^k R_X(\phi(g),\phi(f)) = 6\,(-1)^{1.2} R_X(\phi(f),\phi(g))$$
2. le degré de f chute de $k = 2$ tandis que le degré de g ne chute pas. On a donc :
$$\phi(R_X(f,g)) = (-1)^{2.2}\phi(R_X(g,f)) = \mathrm{lc}(g)^k R_X(\phi(g),\phi(f)) = 6^2\,(-1)^{0.2} R_X(\phi(f),\phi(g))$$
3. ici le degré des deux polynômes chute ; on a $\phi(R_X(f,g)) = 0$ tandis que $R_X(\phi(f),\phi(g)) \neq 0$.

Exercice 3.

On considère les polynômes $f = X^4 + Y^4 - 1$ et $g = X^5Y^2 - 4X^3Y^3 + X^2Y^5 - 1$.

1. Représenter, sur un même dessin, les courbes planes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ d'équations $f = 0$ et $g = 0$.
2. Calculer le résultant $R \in \mathbb{Q}[X]$ de f et g relativement à Y. Expliquer pouquoi les racines de R sont les abscisses des points d'intersertion des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
3. En déduire des *valeurs approchées* des abcisses de ces points d'intersection
4. En remarquant que les courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice, calculer des *valeurs approchées* des coordonnées de ces points d'intersection.

Commentaires

question 2. On applique le théorème de spécialisation du résultant prop 4 du chap 1

On considère $f, g \in \mathbb{Q}[X][Y]$ et pour $x \in \mathbb{C}$ fixé, on considère le morphisme d'anneaux $\phi_x : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ d'évaluation en $X = x$.

Comme f est unitaire (comme polynôme de $\mathbb{Q}[X][Y]$) on a que :

$$\phi_x(R_Y[f, g]) = 0 \Longleftrightarrow R_Y(\phi_x(f), \phi_x(g)) = 0$$

La condition $R_Y(\phi_x(f), \phi_x(g)) = 0$ signifie que les polynômes $\phi_x(f)$ et $\phi_x(g)$ ont une racine commune $y \in \mathbb{C}$ ce qui équivaut à ce que x est l'abscisse d'une point d'intersection (x, y) des deux courbes.

L'équivalence

$$\phi_x(R_Y[f, g]) = 0 \Longleftrightarrow R_Y(\phi_x(f), \phi_x(g)) = 0$$

signifie que ces x sont les racines du polynôme $R_Y(f, g) \in \mathbb{Q}[X]$.