

Fiche de TP 2

Exercice 1.

On considère le polynôme $F = 3X^5 + 7X + 6 \in \mathbb{Z}[X]$.

1. Vérifier que F a toutes ses racines simples.
2. Vérifier qu'il en est de même du polynôme $f = \overline{F} \in \mathbb{F}_5[X]$
3. Vérifier directement pour le polynôme f la formule du cours :

$$\text{discrim}_X(f) = (-1)^{m(m-1)/2} a_m^{k-1} R_X(f, f')$$

avec $k = m - 1 - \deg(f')$.

4. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers premiers p tels que le polynôme réduit modulo p ait des racines multiples. Trouver ces entiers premiers.

Exercice 2.

On considère les polynômes :

$$\begin{aligned} f &= X^4 - 4X^3 - X^2 + 16X - 12 \\ g &= X^3 + 2X^2 - X - 2 \end{aligned}$$

1. Calculer la forme échelonnée réduite (en colonnes) de la matrice de Sylvester $S_X^{4,3}(f, g)$.
2. En déduire le pgcd Δ de f et de g .
3. En déduire une base de l'image de l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \partial_{f,g}^{4,3} : K[X]_{\leq 2} \oplus K[X]_{\leq 3} &\longrightarrow K[X]_{\leq 6} \\ (u, v) &\longrightarrow u f + v g \end{aligned}$$

Exercice 3.

On considère les polynômes :

$$\begin{aligned} f &= 3X^5 + 7X + 6 \\ g &= 2X^5 - 3X^2 + X - 1 \end{aligned}$$

1. Calculer le polynôme :

$$P_{X,Y}^n(f, g) = \frac{f(X)g(Y) - f(Y)g(X)}{X - Y} = \sum_{i,j=0}^{n-1} c_{i,j} X^i Y^j \in \mathbb{Q}[X, Y]$$

2. Former la matrice de Bezout :

$$B_X^n(f, g) = (c_{n-i, n-j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

3. Calculer son déterminant. Que remarquez-vous ?
4. Calculer la forme échelonnée réduite de $B_X^n(f, g)$. Que remarquez-vous ?