

Fiche de TP 6

Exercice 1.

1. Calculer la *base de Gröbner réduite*, pour l'ordre *lexicographique*, de l'idéal I de $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$ engendré par les polynômes $f_1 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 1$, $f_2 = X^2 + 2Y^2 - YZ - 1$ et $f_3 = X + Z^3 - 1$.
2. Le système d'équations :

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 + 1 = 0 \\ X^2 + 2Y^2 - YZ - 1 = 0 \\ X + Z^3 - 1 = 0 \\ X^3 + 2XY - 2 = 0 \end{cases}$$

a-t-il une solution dans \mathbb{C}^3 ?

Exercice 2.

On considère l'idéal I de $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$ engendré par $f_1 = 3X^2Y - YZ$ et $f_2 = XY^2 + Z^4$.

1. Calculer la *base de Gröbner réduite* G de l'idéal I relativement à l'ordre lexicographique.
2. Calculer la *forme normale* du polynôme $f = 3X^4Z - 2X^3Y^4 + 7X^2Y^2Z^2 - 8XY^3Z^2$ relativement à la base G .
3. A-t-on $f \in I$?

Exercice 3.

On considère la *surface algébrique* S de \mathbb{C}^3 définie par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = uv \\ y = uv^2 \\ z = u^2 \end{cases}$$

1. Trouver une équation *cartésienne* de S .
2. Tout point de S correspond-il à une valeur des paramètres ?

Exercice 4.

Utiliser le critère de Buchberger pour déterminer si les ensembles suivants sont des bases de Gröbner pour l'idéal qu'ils engendrent ?

1. $G = [Y^2 - ZX, YX - Z, X^2 - Y]$ pour l'ordre gradué lexicographique-inverse.
2. $G = [XY^2 - ZX + Y, YX - Z^2, X - Z^4Y]$ pour l'ordre lexicographique.