TP 7

Exercice 1. Dans l'algèbre de polynômes $A = \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_8]$ on considère l'idéal I engendré par les polynômes $X_i^3 - 1$ pour $1 \leq i \leq 8$ et par les polynômes $X_i^2 + X_i X_j + X_j^2$ pour (i, j) appartenant à l'ensemble :

$$\mathcal{A} = \{(1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 8), (3, 4), (3, 8), (4, 5), (4, 7), (5, 6), (5, 7), (6, 7), (7, 8)\}$$

1. Déterminer la base de Gröbner réduite G de l'idéal I pour l'ordre lexicographique.
2. Vérifier que l'ensemble $Z(I)$ est fini et déterminer $\text{Card}(Z(I))$.
3. On considère une carte formée de 8 régions numérotées de 1 à 8 ; deux régions i et j étant adjacentes si et seulement si $(i, j) \in \mathcal{A}$. On veut colorier cette carte avec 3 couleurs de sorte que des régions adjacentes aient des couleurs différentes.
 - (a) On représentera chacune des trois couleurs par l'une des *racines cubiques* de l'unité $1, \omega, \omega^2$. Former le système d'équations dont les solutions $(z_i)_{1 \leq i \leq 8} \in \mathbb{C}^8$ sont les solutions du problème de coloriage.
 - (b) Déterminer les solutions en utilisant la base de Gröbner G .

Exercice 2.

On considère l'idéal $I = \langle X^2Y - Y + Z, XY^2 - X + Z, X + Y + Z - 1 \rangle$ de $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$

1. Calculer la base de Gröbner réduite G de I relativement à l'ordre lexicographique.
2. Quels sont les monômes dominants de G ?
3. Trouver les monômes standards de I relativement à cet ordre.
4. Quelle est la dimension de $\mathbb{Q}[X, Y, Z]/I$?
5. Vérifier que l'élément u de l'algèbre quotient $\mathbb{Q}[X, Y, Z]/I$:

$$u = \overline{X^5 + Y^5 + Z^5 - 5X^2Y - 5Y^2Z - 5ZX^2 - 1}$$

inversible et calculer son inverse v .

6. Trouver les solutions du système :

$$\begin{cases} X^2Y - Y + Z = 0 \\ XY^2 - X + Z = 0 \\ X + Y + Z - 1 = 0 \end{cases}$$

Que remarquez-vous ? Est-ce une propriété générale ?