Université Claude Bernard LYON 1
Master MA Mathématiques générales
Algèbre et calcul formel

TP 8

Exercice 1.
On considère la courbe algébrique affine $\mathcal{C}$ d'équation :

$$f = X^2Y^5 - X^5Y^2 - 2\,XY^5 + X^5 + Y^5 - YX^3 - X^2Y^2 - Y^3X$$

1. Donner une représentation graphique de $\mathcal{C}$.
2. Déterminer les coordonnées et l'ordre du point singulier S de $\mathcal{C}$ ainsi que l'équation `ct` du *cône des tangentes* de $\mathcal{C}$ en S.
3. Factoriser `ct` dans $\mathbb{C}[X,Y]$ en un produit de polynômes homogènes de degré 1. En déduire la nature du point singulier S.

Exercice 2.
On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 & 20 \\ 12 & 12 & 18 & 30 \\ 18 & 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
On désignera par m le nombre de lignes et par n le nombre de colonnes de M.

1. Calculer la forme de Smith S de M et des matrices inversibles U et V telles que $S = UMV$.
2. Calculer, pour tout k, $1 \leq k \leq \min(m,n)$, l'invariant déterminantiel $d_k(M)$ de M.
3. Retrouver les *facteurs invariants* de M.
4. Trouver une base de $L = \mathbb{Z}^3$ *adaptée* au sous $\mathbb{Z}$-module L' engendré par les colonnes de M.

Exercice 3.
On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 5/2 & -7/2 & 2 & -5/2 \\ 1 & -5/2 & 2 & -1/2 & 5/2 & -3 \\ 0 & -1 & 9/2 & -7/2 & 3 & -7/2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3/2 & -1/2 & 1 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de A. En déduire les invariants de similitude de A.
2. Former la matrice caractéristique M de A.
   Calculer la forme de Smith S de M ainsi que des matrices inversibles U et V telles que $S = U\,M\,V$.
3. Retrouver les invariants de similitude de A