Université Claude Bernard LYON 1
Préparation à l'agrégation de Mathématiques

Représentations des groupes finis II

Michel CRETIN

1 Représentations des groupes finis - propriétés générales

1.1 Définitions

On considère un groupe *fini* G ; une *représentation* (complexe, de degré fini) de G est un homomorphisme :

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n ; V est appelé *l'espace* de la représentation et n son *degré*.

Lemme 1 *Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation complexe de degré fini d'un groupe fini G ; pour tout $g \in G$, l'automorphisme $\rho(g)$ de V est diagonalisable.*

$\triangledown$ Pour tout $g \in G$, l'automorphisme $\rho(g)$ de V est d'ordre fini, puisque g est d'ordre fini. Il existe donc un entier k tel que $\rho(g)^k = \mathrm{id}_V$ de sorte que $p_{\rho(g)} | X^k - 1 \in \mathbb{C}[X]$. Ainsi le polynôme minimal $p_{\rho(g)}$ est décomposé et toutes ses racines sont simples de sorte que $\rho(g)$ est diagonalisable. $\triangle$

Un sous-espace $W \subset V$ est *stable* pour ρ si l'on a :

$$\rho(g)(W) \subset W$$

pour tout $g \in G$; on en déduit la *sous*-représentation

$$\begin{array}{rcl} \rho|_W : G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(W) \\ g & \longrightarrow & \rho(g)|_W \end{array}$$

de ρ. Soit

$$\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$$

une autre représentation de G ; un *homomorphisme* u de ρ dans ρ' est une application linéaire

$$u : V \longrightarrow V'$$

telle que, pour tout $g \in G$:

$$u \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ u$$

(On dit encore que l'application linéaire u est *compatible* avec les représentations ρ et ρ'). En particulier $\mathrm{Ker}(u)$ (*resp.* $\mathrm{Im}(u)$) est un sous-espace stable de ρ (*resp* ρ').
Lorsque u est bijective on dit que u est un *isomorphisme* de ρ dans ρ'. Enfin on dit que des représentations ρ et ρ' sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme de ρ dans ρ'.

1.1.1 Les représentations de degré 1

Les représentations de degré 1 sont les homomorphismes de groupes :

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 ; ces représentations sont de la forme $\rho = \chi \mathrm{Id}_V$ où χ est un homomorphisme de groupes :

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^\star$$

ie. *un caractère de degré 1* de G. Les caractères de degré 1 s'identifient canoniquement aux *caractères* du groupe abélien fini G^{ab}. Ils forment le groupe $\widehat{G^{\mathrm{ab}}}$. En particulier G possède $\mathrm{Card}(G^{\mathrm{ab}})$ caractères de degré 1.
Par exemple le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ possède deux caractères de degré 1, le caractère unité (de valeur constante 1) et la signature.

1.1.2 Les représentations de permutation

Considérons une action de G sur un ensemble fini X. Soit $|X|$ un ensemble en bijection avec X *via* une application $x \longrightarrow e_x$. On désigne par $\mathbb{C}^X$ l'espace vectoriel de base $|X|$; on en déduit la représention *de permutation* :

$$\rho_X : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^X)$$

où pour tout $g \in G$, $\rho_X(g)$ est l'automorphisme de $\mathbb{C}^X$ caractérisé par :

$$\rho_X(g)(e_x) = e_{gx} \quad \text{pour tout } x \in X$$

En particulier, lorsque G agit sur lui-même par translations à gauche on obtient la représentation *régulière* de G : $\rho_G : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^G)$
Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit canoniquement sur l'ensemble $X = \{1, \cdots, n\}$ d'où la représentation de permutation de $\mathfrak{S}_n$ dans l'espace $\mathbb{C}^n$ de base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$:

$$\rho : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$$

où pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $1 \leq i \leq n$ on a $\rho(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$.
Alors les sous-espaces

$$V = \mathbb{C}\sum_{i=1}^{n} e_i \quad \text{et} \quad W = \{z = (z_i)_{1 \leq i \leq n} \,/\, \sum_{i=1}^{n} z_i = 0\}$$

sont des sous-espaces *stables* de la représentation ρ alors :

$$\rho|V : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

est la sous-représentation *triviale* de degré 1 associée au caractère unité tandis que la sous-représentation de degré $n-1$:

$$\rho|W : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$$

est appelée la représentation *standard* de $\mathfrak{S}_n$.

1.2 Semi-simplicité

Proposition 1 *On considère une représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ de G ; tout sous-espace stable W de V possède un supplémentaire stable W'.*

$\triangledown$ Soit $p \in \mathcal{L}_K(V)$ un *projecteur* d'image W ; on considère

$$P = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1} \in \mathcal{L}_K(V)$$

Alors P est un *projecteur* d'image W : en effet on a $\mathrm{Im}(P) \subset W$; d'autre part pour tout $x \in W$ et tout $g \in G$ on a $\rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1}(x) = \rho(g) \circ \rho(g)^{-1}(x) = x$ de sorte que $P(x) = x$ et donc $P \circ P(x) = P(x)$ pour tout $x \in V$.
De plus P est *compatible* avec la représentation ρ : en effet, pour tout $h \in G$, on a :

$$\rho(h) \circ P \circ \rho(h)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} \rho(hg) \circ p \circ \rho(hg)^{-1} = P$$

puisque les translations sont des permutations de G. Dans ces conditions $W' = \mathrm{Ker}(P)$ est un sous-espace supplémentaire de W stable par ρ. $\triangle$

Une représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est *irréductible* si les seuls *sous-espaces stables* de V sont $\{0\}$ et V.

Soient $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$ deux représentations de G, la somme directe est la représentation de G définie par :

$$\begin{array}{rcl} \rho \oplus \rho' & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V \oplus V') \\ g & \longrightarrow & \rho(g) \oplus \rho'(g) \end{array}$$

Corollaire 1 *Toute représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ se décompose en une somme directe de représentations irréductibles.*

$\triangledown$ Si ρ n'est pas irréductible, il existe un sous-espace stable non trivial W de V qui possède un supplémentaire stable W' et l'on a $\rho = \rho|_W \oplus \rho|_{W'}$ et on conclut par récurrence sur la dimension de V. $\triangledown$

Proposition 2 *Soient $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$ deux représentations irréductibles de G ; alors tout homomorphisme u de ρ vers ρ' est nul ou est un isomorphisme.*

$\triangledown$ Soit u un homomorphisme *non nul* de ρ vers ρ' ; $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace stable de V de sorte que $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ tandis que $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace stable de V' de sorte que $\mathrm{Im}(u) = V'$ et u est un isomorphisme. $\triangle$

Corollaire 2 *Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible ; tout endomorphisme u de ρ est une homothétie.*

$\triangledown$ Considérons alors u un endomorphisme de ρ ; si λ est une valeur propre de u, $v = \lambda \mathrm{Id} - v$ est un endomorphisme de ρ qui n'est pas injectif donc $v = 0$ et $u = \lambda \mathrm{Id}$. $\triangle$

2 Caractères

2.1 Définition et propriétés de base

Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G ; le *caractère* de ρ est l'application :

$$\begin{array}{rcl} \chi_\rho : G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longrightarrow & \mathrm{Tr}(\rho(g)) \end{array}$$

Proposition 3

1. *Pour toute représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$, $\chi_\rho(1)$ est le degré de ρ.*
2. *Pour toute représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ on a $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ pour tout $g \in G$.*
3. *Pour toute représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ $\chi_\rho(g)$ est un entier algébrique pour tout $g \in G$.*
4. *Pour toute représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ on a $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$ pour tout $g, h \in G$ (χ_ρ est une fonction centrale i.e. constante sur les classes de conjugaison de G).*
5. *Si des représentations $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$ sont équivalentes on a :*

$$\chi_\rho = \chi_{\rho'}$$

6. *Pour des représentations $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$ on a :*

$$\chi_{\rho\oplus\rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$$

$\triangledown$ On a $\chi_\rho(1) = \mathrm{Tr}(\mathrm{id}_V) = \dim(V)$ d'où 1).
Puisque $\rho(g)$ est un automorphisme d'ordre fini de V, ses valeurs propres λ_i $(1 \leq i \leq n)$ sont des racines de l'unité d'où :

$$\begin{array}{rcl} \chi(g^{-1}) & = & \mathrm{Tr}(\rho(g^{-1})) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} \\ & = & \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \overline{\mathrm{Tr}(\rho(g))} = \overline{\chi(g)} \end{array}$$

d'où 2). Or les racines de l'unité sont des entiers algébriques et une somme d'entiers algébriques est un entier algébrique d'où 3).
Si u est un endomorphisme de V et v un automorphisme on a $\mathrm{Tr}(vuv^{-1}) = \mathrm{Tr}(u)$ d'où 4) et 5).
Enfin comme $(\rho \oplus \rho')(g) = \begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \rho'(g) \end{pmatrix}$ on a 6). $\triangle$

2.2 Quelques exemples

2.2.1 Caractères de degré 1

Ce sont les caractères des représentations de degré 1, donc les homomorphismes de groupes $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^\star$.

2.2.2 Représentation régulière

Le caractère χ_G de la représentation régulière $\rho_G : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^G)$ est donné par :

$$\chi_G(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq e \\ \mathrm{Card}(G) & \text{si } g = e \end{cases}$$

$\triangledown$ En effet pour $g \neq e$ la matrice de $\chi_G(g)$ dans la base canonique $(e_g)_{g\in G}$ de $\mathbb{C}^G$ n'a que des 0 sur la diagonale. $\triangle$

2.2.3 Représentations de permutation

Plus généralement le caractère χ_X de la représentation de permutation $\rho_X : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^X)$ associée à l'action de G sur un ensemble fini X est donné par :

$$\chi_X(g) = \mathrm{Card}(\{x \in X / gx = x\})$$

$\triangledown$ En effet soit M la matrice de $\chi_X(g)$ dans la base canonique X de $\mathbb{C}^X$; pour tout $x \in X$ on a $M_{x,x} = \delta_{gx,x}$. $\vartriangle$

3 Annexe : Irréductibilité de la représentation standard du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$

Considérons la représentation *standard* de $\mathfrak{S}_n$:

$$\rho|W : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$$

Pour $1 \leq i \leq n-1$, posons $\epsilon_i = e_i - e_{i+1}$; alors $(\epsilon_i)_{1\leq i \leq n-1}$ est une base de l'hyperplan de $\mathbb{C}^n$:

$$W = \{z = (z_i)_{1\leq i\leq n} / \sum_{i=1}^{n} z_i = 0\}$$

Soit c le cycle $c = (1, \cdots, n)$; on a :

$$\begin{cases} \rho(c)(\epsilon_1) = \epsilon_2 \\ \qquad \vdots \\ \rho(c)(\epsilon_{n-2}) = \epsilon_{n-1} \\ \rho(c)(\epsilon_{n-1}) = -(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{n-1}) \end{cases}$$

de sorte que la matrice de $\rho(c)$ dans la base $(\epsilon_i)_{1\leq i\leq n-1}$ de W est la *matrice compagnon* :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 & -1 \\ 0 & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

du polynôme $P = X^{n-1} + \cdots + X + 1 = \dfrac{X^n - 1}{X - 1}$ de sorte que $\chi_{\rho(c)} = p_{\rho(c)} = P$.
Remarque : Pour une matrice A, p_A désigne le polynôme minimal de A et $\chi_A = \det(X\mathrm{Id} - A)$ le polynôme caractéristique (unitaire) de A. De plus si A est la *matrice compagnon* d'un polynôme P on a $\chi_A = p_A = P$.
Puisque P est décomposé et a toutes ses racines $e^{k\frac{2\pi i}{n}}$, $1 \leq k \leq n-1$, simples, on a la décomposition en sous-espaces propres de dimension 1 de W :

$$W = \sum_{k=1}^{n-1} W_{e^{k\frac{2\pi i}{n}}}(\rho(c))$$

Soient ζ l'une de ces valeurs propres et $v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \epsilon_i \in W_\zeta(\rho(c))$ un vecteur propre associé ; on a :

$$\rho(c)(v) = \zeta\, v$$

d'où :

$$-v_{n-1}\epsilon_1+\sum_{i=2}^{n-1}(v_{i-1}-v_{n-1})\epsilon_i=\zeta\, v_1\epsilon_1+\zeta\sum_{i=2}^{n-1}v_i\epsilon_i$$

ce qui donne les équations :

$$\begin{aligned} -v_{n-1} &= \zeta\, v_1 &(1)\\ v_{i-1} &= \zeta\, v_i+v_{n-1} \text{ pour } 2\leq i\leq n-1 &(2)\end{aligned}$$

On a ainsi, d'après les relations (2) :

$$\begin{cases} v_{n-2}=(\zeta+1)v_{n-1}\\ \qquad\vdots\\ v_{n-j-1}=(\zeta^j+\zeta^{j-1}+\cdots+\zeta+1)v_{n-1}\\ \qquad\vdots\\ v_1=(\zeta^{n-2}+\zeta^{n-3}+\cdots+\zeta+1)v_{n-1}\end{cases}$$

Enfin, puisque :

$$\zeta^{n-2}+\zeta^{n-3}+\cdots+\zeta+1=-\zeta^{n-1}=-\zeta^{-1}$$

la relation (1) est vérifiée. En particulier on retrouve que le sous-espace propre $W_\zeta(\rho(c))$ est de dimension 1.
Soit $W'\subset W$ un sous-espace *stable non nul* de W ; $\rho(c)|W'$ est diagonalisable et on a, pour au moins l'une des valeurs propres ζ de $\rho(c)$:

$$W_\zeta(\rho(c))\subset W'$$

Pour $1\leq k\leq n-1$, soit τ_k la transposition $\tau=(k,k+1)$; on a :

$$\rho(\tau_k)(W')\subset W'$$

Pour $k=1$ on a :

$$\begin{cases}\rho(\tau_1)(\epsilon_1)=-\epsilon_1\\ \rho(\tau_1)(\epsilon_2)=\epsilon_1+\epsilon_2\\ \rho(\tau_1)(\epsilon_i)=\epsilon_i \text{ pour } 3\leq i\leq n-1\end{cases}$$

de sorte que :

$$\rho(\tau_1)(v)=v+(v_2-2v_1)\epsilon_1 \text{ pour } v=\sum_{i=1}^{n-1}v_i\epsilon_i\in W_\zeta(\rho(c))$$

Comme $v_2-2v_1\neq 0$ on a $\epsilon_1\in W'$.
Pour $2\leq k\leq n-2$ on a :

$$\begin{cases}\rho(\tau_k)(\epsilon_{k-1})=\epsilon_{k-1}+\epsilon_k\\ \rho(\tau_k)(\epsilon_k)=-\epsilon_k\\ \rho(\tau_k)(\epsilon_{k+1})=\epsilon_k+\epsilon_{k+1}\\ \rho(\tau_k)(\epsilon_i)=\epsilon_i \text{ pour } i\notin\{k-1,k,k+1\}\end{cases}$$

de sorte que :

$$\rho(\tau_k)(v)=v+(v_{k-1}+v_{k+1}-2v_k)\epsilon_k \text{ pour } v=\sum_{i=1}^{n-1}v_i\epsilon_i\in W_\zeta(\rho(c))$$

Comme $v_{k-1} + v_{k+1} - 2v_k \neq 0$ on a $\epsilon_k \in W'$.
Enfin pour $k = n-1$ on a :

$$\begin{cases} \rho(\tau_{n-1})(\epsilon_{n-2}) = \epsilon_{n-2} + \epsilon_{n-1} \\ \rho(\tau_{n-1})(\epsilon_{n-1}) = -\epsilon_{n-1} \\ \rho(\tau_{n-1})(\epsilon_i) = \epsilon_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n-3 \end{cases}$$

de sorte que :

$$\rho(\tau_{n-1})(v) = v + (v_{n-2} - 2v_{n-1})\epsilon_{n-1} \text{ pour } v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \epsilon_i \in W_\zeta(\rho(c))$$

Comme $v_{n-2} - 2v_{n-1} \neq 0$ on a $\epsilon_{n-1} \in W'$.
Finalement on a $W' = W$ et la représentation standard $\rho|W : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$ est irréductible.