Université Claude Bernard LYON 1
Préparation à l'agrégation de Mathématiques

Tables de caractères et sous-groupes distingués

Lemme 1
Soient G un groupe fini et $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation non triviale de G de caractère χ_ρ et de degré d ; on a :

$$\mathrm{Ker}(\rho) = \{g \in G \ / \ \chi_\rho(g) = d\}$$

$\triangledown$ Supposons que $g \in G$ vérifie $\chi_\rho(g) = d$. Or on a $\chi_\rho(g) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ sont les valeurs propres de $\rho(g)$. Mais ces dernières sont des racines de l'unité $k^{\text{ème}}$ de l'unité où k est l'ordre de g, de sorte que l'on a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 1$ et finalement $g \in \mathrm{Ker}(\rho)$. $\triangle$

Corollaire 1
Soient G un groupe fini et $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G de caractère χ_ρ et de degré d ; alors ρ est fidèle (ie. injective) si et seulement si $\chi_\rho(g) \neq d$ pour tout $g \in G \notin \{e\}$.

$\triangledown$ En effet on a $\mathrm{Ker}(\rho) = \{g \in G \ / \ \chi_\rho(g) = d\}$. $\triangle$

Lemme 2
Soit N un sous-groupe distingué non trivial de G ; il existe une représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ de G telle que :

$$N = \mathrm{Ker}(\rho)$$

$\triangledown$ Considérons la représentation régulière gauche du groupe G/N :

$$\rho_{G/N} : G/N \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{G/N})$$

cette représentation est *fidèle* (*ie.* injective). Alors

$$\rho : G \xrightarrow{p} G/N \overset{\rho_{G/N}}{\longrightarrow} \mathrm{GL}(V)$$

est une représentation de G *distincte* pour laquelle on a $N = \mathrm{Ker}(\rho)$ $\triangle$

Pour tout caractère irréductible χ_i, $1 \leq i \leq \nu_G$, de G, posons :

$$N_i = \{g \in G/ / \chi_i(g) = d_i\}$$

où $d_i = \chi_i(e)$ est le degré de la représentation irréductible π de caractère χ_i.

Proposition 1 *Les sous-groupes distingués N de G sont les intersections finies de sous-groupes N_i, $1 \leq i \leq \nu_G$*

$\triangledown$ Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G telle que $N = \mathrm{Ker}(\rho)$; Par le théorème de semi-simplicité ρ est somme directe de représentation irréductibles π_i de G, de sorte que N est l'intersection des noyaux N_i des représentations π_i. $\triangle$

Corollaire 2
Un groupe G est simple si et seulement si pour tout $g \in G \setminus \{e\}$ et tout caractère irréductible χ_i, $2 \leq i \leq \nu_G$, de G distinct du caractère unité χ_1, on a $\chi_i(g) \neq d_i$.

$N_i = \{e\}$ pour $2 \leq i \leq \nu_G$

Exemple : Le groupe alterné $\mathfrak{A}_5$ est simple puisque sa table des caractères est :

$\mathfrak{A}_5$	C_1 1 $e = \{()\}$	C_3 15 $x = (1,2)(3,4)$	C_4 20 $t = (1,2,3)$	C_7' 12 $\delta = (1,2,3,4,5)$	C_7'' 12 $\delta' = (1,3,2,4,5)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_3	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

Exemple : Considérons le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. On a :

$\mathfrak{S}_4$	C_1 1 $e = ()$	C_2 6 $\tau_1 = (1,2)$	C_3 3 $x = (1,2)(3,4)$	C_4 8 $t = (1,2,3)$	C_5 6 $\gamma = (1,2,3,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	2	-1	0
χ_4	3	1	-1	0	-1
χ_5	3	-1	-1	0	1

On a $N_1 = \mathfrak{S}_4$, $N_2 = \mathfrak{A}_4$ et $N_3 = \mathcal{K}$ (le groupe de Klein).