Licence STS Mention MATH L3 - ATN
Groupes abéliens

1 Groupes abéliens de type fini

Lss groupes abéliens de type fini sont notés multiplicativement en SAGE

```
sage: C = AbelianGroup(3,[5,12,8],names='uvw')
sage: C
Multiplicative Abelian Group isomorphic to C5 x C12 x C8
sage: u,v,w = C.gens()
sage: C.invariants()
[5, 12, 8]
sage: C.elementary_divisors()
[4, 120]
sage: C.exponent()
120
sage: C.order()
480
sage: y = u^6*v^15*w^9
sage: y
u*v^3*w
sage: y.list()
[1, 3, 1]
sage: y.order()
40
```

On peut aussi considérer des groupes infinis.

```
sage: F = AbelianGroup(5,[3,4], names='abcde')
sage: F
Multiplicative Abelian Group isomorphic to Z x Z x Z x C3 x C4
sage: a,b,c,d,e = F.gens()
sage: F.invariants()
[0, 0, 0, 3, 4]
sage: x = a^3*b^7*d
sage: x
a^3*b^7*d
sage: x.list()
[3, 7, 0, 1, 0]
sage: F.order()
+Infinity
```

2 Groupes abéliens libres de types finis

Les groupes abéliens libres de type fini sont les $\mathbb{Z}$-modules libres de rang finis.

```
sage: ZZ^3
Ambient free module of rank 3 over the principal ideal domain Integer Ring
sage: (ZZ^3).basis()
[
(1, 0, 0),
(0, 1, 0),
(0, 0, 1)
]
sage: FreeModule(ZZ,3) == ZZ^3
True
```

Tout groupe abélien de type fini peut-être représenté comme conoyau d'une matrice à coefficient entier :

```
sage: M = matrix(ZZ,3,4,[1,5,3,-1,2,0,-1,2,1,-1,0,1])
sage: M
[ 1  5  3 -1]
[ 2  0 -1  2]
[ 1 -1  0  1]
sage: K = M.kernel()
sage: K
Free module of degree 3 and rank 0 over Integer Ring
Echelon basis matrix:
[]
sage: K.basis()
[

]
sage: K.ambient_module() == ZZ^3
True
sage: I = M.image()
sage: I
Free module of degree 4 and rank 3 over Integer Ring
Echelon basis matrix:
[ 1  1  5 -1]
[ 0  2  5 -2]
[ 0  0  6 -2]
sage: b = I.basis()
sage: b
[
(1, 1, 5, -1),
(0, 2, 5, -2),
(0, 0, 6, -2)
]
sage: I.ambient_module() == ZZ^4
True
sage: Q = (ZZ^4).quotient(b)
sage: Q
Finitely generated module V/W over Integer Ring with invariants (2, 0)
```

3 Exercices

Exercice 1.
On considère les deux groupes abéliens

$$M = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}9 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}15 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}35$$
$$M' = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}25 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}3 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}63$$

Calculer l'ordre de G_1 et de G_2.
Les groupes G_1 et G_2 sont-ils isomorphes ?

Exercice 2.
On considère les trois groupes abéliens

$$M_1 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}180 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}600$$
$$M_2 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}360 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}300$$
$$M_3 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}240 \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}450$$

Calculer le ordres de M_1, M_2, M_3.
Pourquoi M_3 n'est-il isomorphe ni à M_1, ni à M_2 ?
Montrer que Les groupes M_1 et M_2 sont isomorphes ?

Exercice 3. Montrer que les deux groupes abéliens d'ordre $n = 4725$:

$$M = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/35\mathbb{Z} \qquad N = \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/63\mathbb{Z}$$

ne sont pas isomorphes.

Exercice 4.
Déterminer la décomposition *canonique* du groupe abélien fini $A = (\mathbb{Z}/22497043\mathbb{Z})^*$ en somme directe de groupes cycliques.

Exercice 5.
On considère la matrice $M = (\text{pgcd}(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$ avec $n = 8$.

1. Construire une base de l'image I (sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$) de M
2. Vérifier que le groupe abélien $A = \mathbb{Z}^n/I$ est fini.
3. Calculer l'ordre et l'exposant de A.

Exercice 6.
On considère le groupe $G = (\mathbb{Z}/2312\mathbb{Z})^*$ des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/2312\mathbb{Z}$.

1. Quel est l'ordre et l'exposant de G.
2. Construire l'ensemble L des éléments d'ordre 272 de G.
3. Ecrire une fonction PYTHON `sgr` qui étant donné un élément $x \in G$ contruit l'ensemble des éléments du sous-groupe cyclique $< x >$.
4. En déduire l'ensemble des sous-groupes de G cycliques d'ordre 272 ?