M1 Analyse MAT1251M automne 2014

cours de Francis Clarke

Exercices pour la partie 2 : Fiche 1

Exer.1 Vérifier que la fonction $(x, y) \mapsto \max(|x + 3y|, |x - y|)$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exer.2 Prouver que $X := C[0,1]$ est un espace vectoriel de dimension infinie. Est-ce que les polynômes forment un ouvert dans X ? Un fermé ?

Exer.3 Sachant que le point $(x, 4, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient au segment (on dit aussi l'intervalle) déterminé par les points $(-3, 3, 1)$ et $(0, 6, 2)$, trouver x et z.

Exer.4 Soit X un espace vectoriel normé (evn). Quels sont les sous-espaces vectoriels L de X qui contiennent une boule ?

Exer.5 Soit X un espace vectoriel, et soit $p : X \to [0, \infty[$ une fonction telle que

1. $p(x) = 0 \iff x = 0$;
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \ \ \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$.

Prouver que p est une norme sur X ssi l'ensemble $\{x \in X : p(x) \leq 1\}$ est convexe.

Exer.6 Prouver la Prop. 2.2 :

Soit $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$, où X,Y sont des espaces normés. Il y a alors équivalence entre les trois assertions suivantes :

1. *Λ est continue ;*
2. *Λ est continue à l'origine ;*
3. *Λ est uniformément continue : pour tout voisinage ouvert V de l'origine dans Y, il existe un voisinage ouvert U de l'origine dans X tel que pour tout x,*

$$x' \in x + U \Longrightarrow \Lambda(x') \in \Lambda(x) + V;$$

4. *Il existe $M \geq 0$ tel que $\|\Lambda x\|_Y \leq M \|x\|_X \ \ \forall x \in X$.*

Exer.7* Soit Λ une forme linéaire non triviale sur X. Prouver que $\Lambda(V)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ quand V est un ouvert dans X.

Exer.8 Soit $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$, où X,Y sont des espaces normés. Montrer que

$$\|\Lambda\| = \sup_{x \in X,\, \|x\|_X = 1} \|\Lambda x\|_Y = \sup_{x \in X,\, \|x\|_X < 1} \|\Lambda x\|_Y = \sup_{x \in X,\, x \neq 0} \frac{\|\Lambda x\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Exer. 9 (a) Soient y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ des points dans un evn Y, et définissons l'application $\Gamma : \mathbb{R}^n \to Y$ par

$$\Gamma\lambda = \Gamma(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \lambda_i \, y_i \, .$$

Prouver que Γ est continue.

(b) Soit X un evn de dimension finie n, et soit $\{ e_i \ : \ i = 1, 2, \ldots, n \}$ une base pour X. Soit $T : X \to \mathbb{R}^n$ l'application qui associe à chaque x dans X ses coordonnées $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ par rapport à cette base. Montrer que T est continue.

(c) Prouver à l'aide de (a) et (b) que si l'evn X est de dimension finie, alors tout $\Lambda \in L(X, Y)$ est continu (c-à-d, appartient à $\mathcal{L}_c(X, Y)$).

Exer. 10* Soit X un espace normé, et soit L un sous-espace de X de dimension finie. Alors L est fermé.

Exer. 11 Soit $1 \leq p < q \leq +\infty$. Montrer que $\ell^p \subset \ell^q$, et que l'injection de ℓ^p dans ℓ^q est continue.

Exer. 12 Prouver que l'application $S : \ell^p \to \ell^p$ qui envoie $(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ à $(x_2, x_3, x_4, \ldots)$ (« shift à gauche ») appartient à $\mathcal{L}_c(\ell^p, \ell^p)$, et trouver sa norme opérateur.

Exer. 13 Il est clair que c_0 est un sous-espace (vectoriel) de c, que c est un sous-espace de ℓ^∞, et que c_0 est un sous-espace de ℓ^1. Dans quels cas peut-on dire « sous-espace fermé » ?

Exer. 14 Soit $1 \leq p < q \leq +\infty$. Alors $L^q(0, 1)$ est un sous-espace strict de $L^p(0, 1)$.

Exer. 15* Soient $1 \leq p \leq +\infty$ et $u \in L^p(\Omega)$. Montrer que

$$\langle T_u, g \rangle := \int_\Omega u(x) g(x) \, dx$$

définit un élément T_u du dual de $L^{p'}$. Trouver $\|T_u\|_*$.

Exer. 16 Pour $1 \leq p < +\infty$, montrer que $(\ell^p)^*$ est isométrique à $\ell^{p'}$.

Exer. 17 (a) Prouver que les deux fonctions suivantes sont bien des normes sur $C[0, 1]$:

$$\|f\|_\infty := \max_{t \in [0,1]} |f(t)| \, , \quad \|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt \, .$$

(b) Sont-elles équivalentes ?

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Prouver que la fonction $\|f\| := \min\{\|f\|_\infty, \, \lambda \|f\|_1\}$ est une norme sur $C[0, 1]$ ssi $\lambda \in \,]0, 1]$.

Exer. 18 Prouver que la partie $P := \{(x_n) : |x_n| < 1 \ \forall\, n\}$ est ouverte dans ℓ^2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la suite (a_n) afin que la partie $\{(x_n) : |x_n| < a_n \ \forall\, n\}$ soit ouverte dans ℓ^2.

Exer. 19 Pour $1 \leq p < \infty$, on pose $G_p := \{(x_n) \in \ell^p : \sum_1^\infty x_n = 0\}$. Montrer que G_p est un sous-espace vectoriel de ℓ^p. Est-ce que G_p est fermé ?

Exer. 20 Soient X, Y deux evn, soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ un opérateur linéaire, et soit (T_n) une suite dans $\mathcal{L}(X,Y)$. On pose

$$A = \{x \in X : T_n x \text{ ne converge pas vers } Tx\} \ .$$

Prouver que A est soit vide, soit dense dans X. [Indication : de façon générale, si $A \subset X$ est tel que $X \backslash A$ est un sous-espace vectoriel...]

Exer. 21 Soit $1 \leq p < \infty$.

(a) Prouver que $L^p(0,\infty)$ est de dimension infinie.

(b) On pose

$$A_p \ := \ \left\{ f \in L^p(0,\infty) : \int_0^\infty f(t)\, dt \ = \ 0 \right\} \ .$$

Prouver que A_p est un sous-espace vectoriel de dimension infinie de $L^p(0,\infty)$.

(c) Montrer que A_p est fermé si et seulement si $p = 1$.

Exer. 22 Soient $c, d \in \mathbb{R}$, et soit X l'espace vectoriel des fonctions $x \in C^\infty[0,1]$ qui sont solution de l'équation différentielle

$$x''(t) + cx'(t) + dx(t) = 0 \,, \quad t \in [0\,,1].$$

Déterminer lesquelles des fonctions suivantes définissent une norme sur X :

$$x \mapsto |x(0)| \,, \quad x \mapsto |x(0)| + |x(1)| \,, \quad x \mapsto |x(0)| + |x'(0)|$$
$$x \mapsto |x(1/2)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)| \,, \quad x \mapsto \int_0^{1/2} |x(t)|\, dt \,, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^\infty |x(1/i)| \,.$$