M1 Analyse MAT1251M automne 2014

cours de Francis Clarke

Exercices pour la partie 2 : Fiche 2

X est toujours un evn.

Exer.23 * Montrer que pour tout $x_0 \in X$, il existe $\zeta_0 \in X^*$ tel que $\|\zeta_0\|_* = \|x_0\|$ et $\langle \zeta_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$. En déduire qu'on a

$$\|x\| = \max\{\langle \zeta, x \rangle : \|\zeta\|_* \leq 1\} \ \ \forall\, x \in X.$$

Exer.24 * Soit M un sous-espace de X. Si $x_0 \notin \overline{M}$, prouver qu'il existe $\Lambda \in X^*$ tel que $\Lambda(x_0) = 1, \Lambda \equiv 0$ sur M. En déduire que si M est un sous-espace de X tel que

$$\Lambda \in X^*,\ \Lambda(M) = \{0\} \implies \Lambda \equiv 0,$$

alors M est dense dans X.

Exer.25 * Soient E un espace vectoriel et $f_0, f_1, \ldots, f_n$ des formes linéaires sur E. Utiliser le théorème de séparation pour montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

1. $\exists\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$;
2. $\exists\, M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f_0(x)| \leq M \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)| \ \ \forall\, x \in E$;
3. $x \in E,\ f_i(x) = 0\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \quad \implies \quad f_0(x) = 0.$

Exer.26 On prend $X = \ell^2$, et

$$K_1 = \big\{ x = (x_1, x_2, \ldots) \in X \ :\ x_i > 0\ \ \forall\, i \big\}, \quad K_2 = \ell_c^\infty.$$

Montrer que ces deux parties dans X sont convexes et disjointes, mais qu'il n'existe aucun $\zeta \in X^*$ qui satisfait $<\zeta, x> \ < \ <\zeta, y> \ \ \forall\, x \in K_1,\ y \in K_2$.

Exer.27 Soit A une partie dans X. On a $\overline{\text{co}}(A) = \text{adh}\,(\text{co}(A))$.

Exer.28 Soit A un compact dans $\mathbb{R}^n$. Prouver que $\text{co}(A)$ est compact.

Exer.29 * Soient A une partie compacte dans un espace topologique E, et $f : E \to \mathbb{R}^{+\infty}$ une fonction sci telle que $\text{dom}\, f \cap A \neq \emptyset$. Prouver que f atteint un minimum sur A.

Exer.30 Soit $f : X \to \mathbb{R}^{+\infty}$ positivement homogène et sous-additive. Prouver que f est convexe.[2]

2. On dit que f est positivement homogène si $f(tx) = tf(x)$ quand t est un scalaire positif. La sous-additivité est la propriété $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Exer.31 Soit $\zeta \in X^*$. Montrer que ζ est bornée sur la boule fermée $B(0,1)$. Donner un exemple où ζ n'atteint pas ses bornes sur $B(0,1)$.

Exer.32 C et D sont des parties non vides dans X, D étant convexe et fermé. On définit la *fonction d'appui* $H_C : X^* \to]-\infty, \infty]$ par

$$H_C(\zeta) := \sup_{x \in C} \langle \zeta, x \rangle.$$

1. Montrer que H_C est positivement homogène et sous-additive (et par conséquent, convexe).
2. Montrer que $C \subset D$ si et seulement si $H_C \leq H_D$. En déduire que deux parties fermées convexes coïncident ssi leurs fonctions d'appui coïncident.
3. Soit S un sous-ensemble non vide et borné de X. Prouver que $C \subset D$ si et seulement si $C + S \subset D + S$.
4. Montrer que l'équivalence est fausse en général (même en une dimension) si S n'est pas borné, ou si D n'est pas fermé, ou si D n'est pas convexe.

Exer.33 Soient D un ensemble compact convexe dans $\mathbb{R}^n$ et $f : [\,a, b\,] \to D$ une fonction mesurable. Prouver que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \ \in \ D.$$

Exer.34 Si $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{+\infty}$ est convexe sci et si $f(u) \to +\infty$ quand $|u| \to +\infty$, alors il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$f(u) \geq \alpha |u| - \beta \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^n.$$

Exer.35* Il s'agit de prouver le suivant :

Proposition. *Soit* $\{\, \zeta_i \ : \ i \ = \ 1, 2, \ldots, k \,\}$ *un ensemble fini dans* X^**. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Il n'y a aucun* $v \in X$ *tel que* $<\zeta_i, v> < \ 0 \ \ \forall\, i \in \{\, 1, 2, \ldots, k \,\}$ *;*
2. *L'ensemble* $\{\, \zeta_i \ : \ i \ = \ 1, 2, \ldots, k \,\}$ *est positivement linéairement dépendant : il existe un vecteur non nul positif* $\gamma \in \mathbb{R}^k$ *tel que* $\sum_1^k \gamma_i\, \zeta_i \ = \ 0$.

Montrer premièrement que (2) $\Longrightarrow$ (1). Supposons maintenant (1). Pourquoi peut-on invoquer le théorème de séparation pour les ensembles

$$K_1 \ = \ \big\{\, y \in \mathbb{R}^k \ : \ y_i \ < \ 0 \ \ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, k\} \big\},$$
$$K_2 \ = \ \big\{\, \big(\ <\zeta_1, v>, <\zeta_2, v>, \ldots, <\zeta_k, v> \ \big) \ : \ v \in X \,\big\}\,?$$

Déduire (2) en séparant.

Exer.36 Soient S une partie dans X. La *fonction indicatrice* I_S de S veut dire la fonction qui vaut 0 sur S et $+\infty$ ailleurs. Montrer que I_S est convexe ssi S est convexe, sci ssi S est fermé, and propre ssi S est non vide.

Exer.37 Soit A une partie bornée dans un espace normé X. Prouver que

$$\operatorname{co}\big(\partial A\big) \supset \operatorname{cl} A\,.$$

Exer.38 Soit X un espace normé, et soit A une partie ouverte dans X telle que chaque point x de la frontière de A admet un hyperplan d'appui ; c-à-d, il existe $0 \neq \zeta_x \in X^*$ et $c_x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle\, \zeta_x, x\,\rangle \,=\, c_x\,,\ \ \langle\, \zeta_x, u\,\rangle \leq c_x\ \ \forall\, u \in A\,.$$

Montrer que A est convexe. Prouver que le résultat reste vrai lorsque l'hypothèse "A est ouverte" est remplacée par "A est fermé et d'intérieur non vide."

Exer.39 Soit $\zeta : X \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle sur un espace normé X. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. ζ est continue ;
2. $\mathcal{N}(\zeta)$ est fermé ;
3. $\mathcal{N}(\zeta)$ n'est pas dense dans X ;
4. ζ est bornée sur un voisinage de l'origine ;
5. Il existe $M \geq 0$ tel que $|\zeta x| \leq M\|x\|\ \ \forall\, x \in X$.

Exer.40 (Cônes normaux) Soit C une partie dans X et soit $x \in C$. Le *cône normal* à C en x (au sens de l'analyse convexe) est l'ensemble

$$N_C(x) := \{\zeta \in X^* : \langle \zeta, x' - x\rangle \leq 0\ \ \forall\, x' \in C\}.$$

1. Montrer que si C est un convexe d'intérieur non vide, alors $N_C(x) \neq \{0\}$ pour tout $x \in \partial C$.
2. Posons $X := \ell^2$ et $C := \{x \in X : |x_i| \leq 1/i\ \ \forall\, i\}$. Prouver que C est un convexe fermé, que $0 \in \partial C$, mais que $N_C(0) = \{0\}$.
3. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $x \in \partial C$. Montrer que $x \notin \operatorname{int}(\overline{C})$. En déduire qu'en dimension finie, on a toujours $\operatorname{int} C = \operatorname{int} \overline{C}$ quand C est convexe. Montrer comment l'existence d'une forme linéaire non continue fournit un contre-exemple à cette assertion en dimension infinie.
4. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$, $x \in \partial C$. Montrer que $N_C(x) \neq \{0\}$.
5. Soient C et D deux convexes disjoints de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $\zeta \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que

   $$\langle \zeta, x\rangle \leq \langle \zeta, y\rangle \quad \forall\, (x, y) \in C \times D.$$

   [Remarque : il s'agit du dernier cas du théorème 2.29.]

Exer. 41 1. Soit C une partie fermée dans X telle que

$$x, y \in C \Longrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in C.$$

Prouver que C est convexe.

2. Soit $f : X \to \mathbb{R}^{+\infty}$ une fonction sci telle que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) \;\; \forall\, x, y \in X.$$

Prouver que f est convexe.

Exer. 42 Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable telle que, pour certaines constantes positives a et b, l'on ait

$$0 \leq f(x) \leq a + b|x|^2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Identifier des constantes c et d telles que

$$|f'(x)| \leq c + d|x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$