Master MG1 cours de Francis Clarke Examen du 8 janvier 2015 durée 3h

L'utilisation de documents de toute nature, de calculettes, et de téléphones n'est pas autorisée. Les exercices sont de poids égal.

1. On considère pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ la fonction $g(x,y) := x^2 + \dfrac{2x+4}{1+y} - 5x + 2y$.

(a) Prouver que g est convexe sur $\mathbb{R}^2_+$.

(b) Prouver que la fonction $h(z) := \ln(1+z)$ est concave sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

(c) En déduire que la fonction $f(x,y,z) := g(x,y) - 2h(z) + z$ est convexe sur $\mathbb{R}^3_+$.

(d) Prouver que f atteint un minimum par rapport à $\mathbb{R}^3_+$ au point $(2,1,1)$.

(e) Prouver que $(1,1,1)$ est solution du problème (P) de minimiser $f(x,y,z)$ sous les contraintes $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 3,\ 5y+4z = 9$.

2. Dans cet exercice, X est un evn, et C et D sont des parties non vides dans X, D étant convexe et fermée. La fonction d'appui $H_C : X^* \to \mathbb{R}^{+\infty}$ de C est définie par $H_C(\zeta) := \sup_{x \in C} \langle \zeta, x \rangle$, pour $\zeta \in X^*$ (et de même pour D).

(a) Montrer que H_C est convexe et semi-continue inférieurement.

(b) Montrer que $C \subset D$ si et seulement si $H_C \leq H_D$.

(c) Soit $S \subset X$ non vide et borné. Prouver que $C \subset D$ si et seulement si $C + S \subset D + S$.

3. Soit X un espace de Banach, et soit $T : X \to X^*$ une application linéaire qui satisfait $\langle Tx, y \rangle = \langle Ty, x \rangle$ pour tous x, y dans X. Montrer que T est continue.

4. Soit X un espace de Banach uniformément convexe, et soit C une partie non vide, convexe, et fermée dans X.

(a) Prouver que pour chaque $u \in X$, il existe un point $c(u) \in C$ tel que l'ensemble $\text{proj}_C(u)$ (projection de u sur C) est le singleton $\{c(u)\}$.

(b) Donner un exemple d'un Banach pour lequel la conclusion fait défaut.

Rappel : Un evn $(X, \|\cdot\|_X)$ est uniformément convexe lorsque

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } x \in B,\ y \in B,\ \|x-y\|_X > \varepsilon \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_X < 1 - \delta.$$

5. On s'intéresse, pour un paramètre $\beta \in \mathbb{R}$, au problème

$$\text{minimiser / maximiser } \int_0^1 [1 + x(t)] x'(t)^2 dt \ \text{ s.l.c. } x(0) = 0,\ x(1) = \beta,\ x(\cdot) \in C^2[0,1].$$

(a) Prouver que ce problème n'admet aucun maximum local.

(b) Écrire l'équation d'Euler (forme initiale, et développée) ; ne pas résoudre.

(c) Pour $\beta > 0$, sachant qu'il existe un minimum local de la forme $x(t) = (ct+1)^r - 1$, où c et r sont des constantes positives, déterminer r.

(d) Prouver que quand $\beta = 0$, la fonction $x(t) \equiv 0$ est un minimum local pour le problème.

Rappel : L'équation de Jacobi pour $x(\cdot)$ est $-\dfrac{d}{dt}\{P(t)u'(t)\} + Q(t)u(t) = 0$, où

$$P(t) = \Lambda_{vv}\big(t, x(t), x'(t)\big), \qquad Q(t) = \Lambda_{xx}\big(t, x(t), x'(t)\big) - \frac{d}{dt}\Lambda_{xv}\big(t, x(t), x'(t)\big).$$